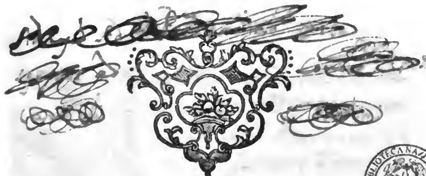


ELEMENTA
MATHESEOS

ELEMENTA
MATHESEOS
AD MECHANICAM
PHILOSOPHIAM
in privatis Scholis
TRADENDAM, ET COMPARANDAM
ACCOMMODATA

AUCTORE
P. F. FORTUNATO A BRIXIA
Ord Min. Ref. Prov. Brixiæ, Lect. Theol. Script. Ordinis, & in Brixiana Academia publ. Matheseos, & naturalis Philosophiæ Professore.





BRIXIAE. CIƆIƆCCL.
Ex Typographia JOANNIS-MARIÆ RIZZARDI
SUPERIORUM APPROBATIONE.



NOBILI ERUDITISSIMOQUE VIRO

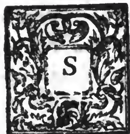
COMITI

JOANNI - MARIAE MAZZUCHELLO

PATRICIO BRIXIANO

F. FORTUNATUS A BRIXIA MIN. REF.

F.



I jus Artium liberalium, omniumque Disciplinarum est, COMES AMPLISSIME *ut sibi summos Viros patronos & fautores quærant, non ea sane de causa, prudentum judicio, reprehendar, quod ausus*

sim, opusculum hoc, quodcunque est, Tuo nomine decorare. Cum enim ea hic Matheseos elementa contineantur, quæ ad Mechanicam Philosophiam in privatis scholis tradendam comparandamque necessaria apprime sunt, ad Te confugere visum est, qui studiis hisce gaudes, atque hæc foves, eorundemque dux & quasi auspex in florentissima hac Civitate facili judicaris. Testis est Academia, quam nuper domi Tuæ aperuisti. Huc enim Viri optimarum artium studiis eruditi confluentes, quas Tibi gratissimas vident esse, Physico-Mechanicas Dissertationes sæpissime proferunt, earumque Te laudatorem cum habeant, hujus disciplinæ culturam mirifice omnibus commendatam intuentur. Quis autem dubitet, quin Urbs ista multum Tibi debeat, qui juventutem præsertim ad sui ingenii fœtus prodendos alliciens, illud evicisti, ut mi-

 nus

nus jam, quam ante, otio & segnitie diffluat, majorisque laudis amore tangatur? Verum hac de re satis; neque enim deerunt, VIR ERUDITISSIME, *qui consilium hoc Tuum, & institutum tam utile, tamque honestum melius ac prolixius laudent. At vero quid dicam de sanguinis dignitate, ceterisque fortunæ bonis, quæ Te spectatum reddunt, atque ut in lauta & bene aucta parte apud omnes puteris, plurimum faciunt? Non mediocriter quidem oculos sæpe atque animum percussit splendor familiæ Tuæ, præferentis in stemmate longam eorum seriem, qui de Patria, & de Republica benemeriti, utramque sibi militaribus officiis obstrinxerunt. Vivit & in omne ævum vivet, etiam post fata superstes,* EQUES FRIDERICUS *Pater Tuus, cujus eximiam animi pietatem, summam sapientiam, atque prudentiam singularem, neque est hujus loci, neque ingenii*

cele-

celebrare. Hæc reputanti mirum ſane non accidet, ſi tanta in ſe merita æquus rerum æſtimator ac remunerator PRINCEPS SERENISSIMUS *amplis honoribus rependere & inſignire decrevit. Ut tamen verum fatear, non tam genus, & proavos, actaque Majorum, quam ea, quæ vere Tua ſunt, ego ſuſpexi probitatem ſcilicet morum, ſummum in proſperis rebus modum, atque in cujuſvis generis ſtudia amorem plane incredibilem. Tenet univerſa Civitas, quæ prima ac potior cura Tua ſit, literis nempe conſulendi & literatis. Norunt omnes, quanta in antiquis monumentis inveſtigandis Tua ſit ſolertia, quanta in illis explicandis claritas & elegantia, quantaque in nobilioribus Diſciplinis, atque in critica potiſſimum arte eruditio. Quis enim eſt, qui Tuum illum præclarum de* Archimedis vita & ſcriptis *jam ſplendide editum, magno-*

que

que Eruditorum omnium plausu acceptum, libellum non miretur? Ecquis itidem est, qui summe non cupiat, ut quamcitissime publica fruatur luce alterum de Vita Petri Aretini *nuper a Te conscriptum, Tuisque animadversionibus ornatum volumen? Quis demum, cui non sit in votis, quod jam paras, & cujus jam in vita prælo parata tum* Petri Apponensis, *tum* Alamanni *eximium specimen propediem daturus es, ingens opus atque ipsa magnitudine pretiosum, de eorum* vita, scriptis, gestisque rebus, *qui ad hæc usque tempora in Italia floruerunt? His quidem de caussis factum videmus, ut docti omnes eruditique Viri Te in deliciis habeant, Te certatim extollant, suisque scriptis Tuum nomen inserere gestiant: atque hæc sunt,* MECOENAS NOBILISSIME, *quæ Te mihi semper spectatissimum, me vero Tibi quammaxime ob-*

stri-

strictum reddiderunt: hæc, quæ impulerunt, ut Tibi uni libellum hunc inscriberem, Tuorum in me magnorum meritorum, nec minoris meæ in Te observantiæ argumentum. Fac igitur, æquo animo accipias, mihique pergas bene velle, ut facis, quamvis nihil prorsus in me sit, quod amorem Tuum mereri aliquo modo posse videatur. Vale.

Dabam Brixiæ X. Kal. Octobris 1740.

LECTORI BENEVOLO.

NON est, candide Lector, cur te plurimum morer in limine, multisque verbis detineam. Satis superque patet ex titulo, quodnam consilium fuerit hujus opusculi conscribendi. Ad mechanicam scilicet Philosophiam in privatis scholis tradendam & comparandam parare viam in animo fuit, non autem perfectum Geometram facere. Illud si contigerit, mihi beatus videbor, quod res cesserit, ut erat in votis; neque moleste feram, si quis naribus in me utatur, quasi crambem recoxerim. Contrarium vero si accidet, hoc ero contentus, totum me id fecisse, quod fieri meis pro viribus poterat, ut ad veram solidamque Philosophiam facilem cuique aditum aperirem. Nemo tamen opusculum in manus sumat, qui in vulgari Arithmetica plane hospes sit. Prima siquidem eximiæ hujusce Disciplinæ elementa hic habeo veluti nota atque perspecta. Pauca de *calculo literali* præmitto, & forte nimis pauca: verum quantum satis,

ut, quæ a me hic traditur, *proportionum* theoria, cujus gratia dumtaxat ſpecimen illud Algebrici calculi in limine exhibeo, nitide percipiatur. *Sectionum* quoque *conicarum* doctrinam ſummis tantum labiis attingo, quod nimirum nonniſi pauca ex iis, quæ ab hiſce curvis dependent, naturæ phœnomena, in privatis ſcholis explicentur. Porro, cum eorum tantummodo cauſa opuſculum hoc conſcripſerim, qui Matheſim ne a limine quidem ſalutarent, niſi turpe ducerent, ſe Mechanicæ Philoſophiæ prorſus eſſe ignaros, ea dumtaxat Matheſeos elementa ſelegi, quæ ſatis mihi viſa ſunt, ut in ameniori Phyſicæ parte nemo, ſi velit, plane hoſpes exiſtat. At vero quoniam non unus eſt, qui Recentioribus vitio vertat, rerum naturalium ſcientiam ita ab illis pertractari, eoque jam eſſe, ipſorum ſtudio, perductam, ut ne extremis quidem labiis delibari ea poſſit, niſi in addiſcendis *Algebræ* atque *Geometriæ* elementis, melior vitæ pars improbo prorſus labore teratur, ſtudium curamque omnem adhibui, ne opuſculum in nimiam molem, Tyronum terriculamento,

excre-

excrescerect. In condendis idcirco demonstrationibus compendio, quoad fieri poterat, studui; pluresque etiam propositiones sine ulla demonstratione, iis Theorematibus, coronidis instar, subjeci, ex quibus, si perspecta Theoremata ipsa optime fuerint, facillime deducuntur: ratus insuper, Tyronibus quammaxime profuturum, si in illis *corollariis* deducendis demonstrandisque patienter exercerentur. Ceterum velim, ut, *qui pulcherrimam hanc habitant Civitatem, nullo modo Geometriam spernant. Scimus enim, quin etiam ad disciplinas omnes facilius perdiscendas interesse omnino, attigeritne Geometriam aliquis, an non* (a). Absit tamen, ut ego cuique imponam. Tu interim, erudite Lector, benigne accipe, quæ damus; sin minus, animum velim ne digneris. Vale.

APPRO-

(a) Plato lib. VII. de *Republica*.

APPROBATIONES.

CUm jussu Reverendissimi P. Felicis a Roma V. Commissarii Generalis hujus Reformator. Familiæ attento serioque animo expenderimus opus, cui titulus est: *Elementa Matheseos ad Philosophiam in privatis Scholis tradendam, & comparandam accommodata*, opera & studio R. P. F. Fortunati a Brixia hujus Refor. Brixiensis Provinciæ S. The. Lect., Script. Ord., & in Brix. Academ. Publ. Math. Orthodoxæ Fidei, aut pietati, probisve moribus vel minimum adversetur, idcirco dignum censemus, ut communi Scholarum utilitati publica luce fruatur, si ita videbitur &c.

Brixiæ in Conventu Corpor. Christi Anno 1740. die 14. Julii.

F. *Carolus a Golleono Lect. Theol.*
F. *Jo: Baptista a Brixia Lector Theol.*

FR.

FR. VINCENTIUS A CASALI POSTERLENGORUM Strict. Obſerv. S.P.Franc. Lector Emeritus, ac in tota Ciſmontana Reformator. Familiæ Pro-Vice-Commiſſarius Generalis, & humilis in Domino Servus.

Dilecto Nobis in Christo P.F.Fortunato a Brixia Sac. The.Lectori, ac Concionatori noſtræ Refor. Provinciæ Brixien. Alumno, ſalutem, & Seraphicam benedictionem.

CUm iuxta Apoſtolicas, noſtrique Ordinis Conſtitutiones, Opus, cui titulus eſt: *Elementa Matheſeos ad Philoſophiam in privatis Scholis tradendam, & comparandam accommodata*, a Te elaboratum ab idoneis noſtræ Reformationis Cenſoribus, ad id ſpecialiter a Rmo P.Felice a Roma ex V.Commiſs. Gener. deputatis, recognitum fuerit, & approbatum, Nos præſentium tenore, ac cum ſalutaris obedientiæ merito, Tibi facultatem facimus, & impertimur, ut ſervatis aliis de jure ſervandis, illud Typis evulgare poſſis, & valeas.

Dat. Romæ ex noſtro Conventu S. Franc. ad Ripas Tyberis die 23. Julii 1749.

(Fr. Vincentius a Caſali Puſterl. P.V. Commiſs. Gen.

L. ✠ S.

De mandato Paternitatis tuæ Rmæ
Fr. Antonius Maria a Valleſolida Secr. Gen.

NOI

NOI RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di revisione, ed approvazione del P. F. Paolo Tommaso Manuelli Inquisitore di Venezia, nel Libro intitolato: *Elementa Matheseos ad Philosophiam &c. Auctore P. Fortunato a Brixia Ord. Minor. Ref. Prov. Brixiæ*, non v'esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi, concedemo licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Brescia, che possa esser stampato; osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 6. Luglio 1740.

(Z. Piero Pasqualigo Rif.
(Gio: Emo Proc. Rif.
(Lorenzo Tiepolo Kav. Proc. Ref.

Reg. in Lib. a car. 55.

Agostino Bianchi Segret.

PRO:

PROLEGOMENA.

I.

MAthesis nomine ea designatur facultas, quæ circa *quantitatem* in abstracto sumtam versatur, ejusque affectiones inquirit, atque demonstrat. *Mathesis* græce dicta est, nimirum *disciplina*, *doctrina*, sive *scientia* latine. Tanta quippe est, quæ ex illa in omnes plane scientias derivatur, utilitas; tantaque eorum, quæ in ipsa traduntur, certitudo & evidentia, ut *scientiæ* atque *disciplinæ* nomen peculiari quodam jure illi competere videatur. Duæ porro sunt *Matheseos* partes præcipuæ, *Arithmetica* scilicet, & *Geometria*, quemadmodum duo sunt genera *quantitatis*, nimirum *discreta*, & *continua*.

II.

Arithmetica est scientia theoretico practica de *quantitate discreta*, sive de *numeris*. *Geometria* vero est scientia theoretico practica de *quantitate continua permanenti finita*, ut tali, nimirum de *lineis*, *superficiebus*, & *solidis*, prout terminata sunt, & a sensibili materia præscindunt. Ut autem *Arithmetica* Phœnicibus, quod propter mercaturam, cui quammaxime dediti erant, *numerorum* scientiam impensius colerent, ita *Geometria* Ægyptiis accepta refertur; quatenus nempe, cum propter anniversariam Nili exundationem, agrorum fines confunderentur, necesse illis fuit, ut scientiam invenirent, qua iterum agri dividerentur, quodque suum erat, cuique redderetur. *Geometria* idcirco dicta est, quod *terræ dimensionem* sonat. Si tamen res sit de prima utriusque hujusce eximiæ facultatis origine, inficias ibit nemo, eam Adamo referri debere acceptam: atque utriusque notitiam, sicuti etiam reliquas omnes scientias, ab eo in posteros derivasse; cum neminem lateat, primos parentes plenitudinem scientiæ, statim ac creati fuerant, a Summo rerum Opifice accepisse.

III.

Principia, quæ in Mathesi adhibentur, sunt *definitiones*, *axiomata*, & *postulata*. *Definitionibus* explicantur termini, quorum notio latet. *Axiomata* sunt propositiones quædam theoreticæ, quarum veritas ex ipsis terminis manifesta est; unde *communes* etiam *notiones* vocantur. *Postulata* vero sunt quædam ita factu facilia, ut frustraneum sit, ea fieri posse demonstrare. Hinc *anxiomata* ad *theoreticam*, *postulata* ad *practicam* Matheseos partem spectant.

IV.

Propositiones demonstrandæ vel *theoremata* sunt, vel *problemata*. *Theorema* dicitur propositio speculativa, quæ ex definitionibus, axiomatis, aliisve jam antea demonstratis propositionibus ostenditur. *Problema* vero est propositio, qua aliquid faciendum proponitur, illudque recte fieri, sicuti in ea traditur, demonstratur. *Theoremata* idcirco traduntur in parte Matheseos *theoretica*. *Problemata* vero in parte ejusdem *practica* exhibentur. Datur porro & aliud theoreticarum propositionum genus, quod *Lemma* dicitur. Est autem *Lemma* propositio quædam speculativa, quæ cum *theoremati* demonstrando inserviat, neque commode citari possit, illi præmittitur, & demonstratur.

V.

Mathematica demum methodus in eo tota posita est, I. *ut a generalioribus & simplicibus sumto initio, ad minus generalia, atque composita paulatim ac veluti per gradus progrediatur* II. *ut nihil relinquatur in terminis, quod obscurum sit vel ambiguum*. III. *ut omnes propositiones, quæ ex terminis non sunt evidenter notæ, ope definitionum præmissarum, axiomatum concessorum, vel propositionum antea demonstratarum ostendantur*.

ISA-

ISAGOGES MATHEMATICA.

1. ALgebra, sive *Arithmetica speciosa*, ea facultas est, quæ *indeterminatarum* quantitatum calculum tradit. Loco idcirco notarum numeralium 1.2.3.&c. quæ in *vulgari* Arithmetica adhibentur, alphabeti literæ a, b, c, d, &c. in *speciosa* usurpantur; ut enim illæ quantitatem *determinatam*, ita istæ *indeterminatam* optime designant & exprimunt. Tria porro sunt signa, quæ potissimum in *Algebra* usu veniunt, scilicet $+$, $-$, & $=$. Signum $+$ significat *plus*, signum $-$ *minus*, & signum $=$ *æqualitatem*. Videlicet $a+b$ designat, quantitatem a sumendam simul esse cum quantitate b. Contra vero $a-b$ excessum exprimit, quo magnitudo a superat magnitudinem b. At vero $a=b$ significat, magnitudines a, b esse æquales. Cum ergo scribitur $a+b=m$, perinde est, ac si dicatur, quantitatem a una cum quantitate b æquare quantitatem m; sicuti etiam cum scribitur $a-b=m$, perinde est, ac si dicatur, excessum magnitudinis a supra magnitudinem b magnitudini m esse æqualem. Magnitudo demum Algebrica dividitur in *simplicem*, & *complexam*. Magnitudo *simplex* sive *incomplexa* est illa, quæ una, vel pluribus literis nullo interjecto signo $+$, aut $-$ simul copulatis exprimitur, cujusmodi sunt a, b, bdx &c. *Complexa* vero magnitudo ea est, quæ pluribus terminis constat, interjecto signo $+$, vel $-$ simul unitis, ut $a+b$, & $a-b+d$ &c. Porro sicuti in Arithmetica *vulgari*, ita in *speciosa*, quatuor numerantur operationes, videlicet *additio*, *subtractio*, *multiplicatio*, & *divisio*.

De additione.

I.

2. *Additio* in *Algebra* fit ope figni positivi +, eas omnes scilicet magnitudines illo mediante simul copulando, quarum summa quæritur. Ut si magnitudini a addenda sit magnitudo b, scribendum est $a + b$, adeo ut $a + b$ sit illarum summa quæsita. Hoc eodem modo *complexarum* quoque magnitudinum additio perficitur. Nimirum sicuti $a + b$ exprimit summam magnitudinum *simplicium* a, b, ita $a + b + d - e$ summam designat magnitudinum *complexarum* $a + b$, $d - e$.

I I.

3. Verum si in aliqua summa fuerint plures termini similes, hoc est, eadem litera expressi, eodemque signo +, vel — affecti, unus tantum, ceteris deletis, in calculo scribi debet, præfixa illi nota numerica, quæ numerum ipsorum terminorum designet. Videlicet loco summæ $a + b + a$. scribendum est $2a + b$. Hujusmodi porro numerus Algebrico termino præfixus, indicans quoties terminus ipse in calculo computari debeat, illius *coefficiens* nuncupatur. Sic numerus 2 dicitur *coefficiens* termini $2a$.

I I I.

4. Si termini *similes*, qui simul colligendi sunt, contrariis signis affecti fuerint, in ipsa summa deleantur. Sic in summa $a + b + d - b$ deleantur termini $+ b$, $- b$; quippe ratione signorum oppositorum illi sese mutuo perimunt.

I V.

5. Quod si termini similes contrariis signis affecti, habeant *coefficientes* inæquales, minor *coefficiens* majori subducatur, ejusque residuo illud in summa præfigatur signum, quo

quo affectus erat terminus majori *coefficiente* donatus. Ut; si in aliqua summa habeantur termini $+ 6a$, $- 4a$, vel $- 4b$, $+ 2b$, loco aggregati $+ 6a - 4a$, scribatur $+ 2a$; & loco aggregati $- 4b + 2b$, scribatur $- 2b$. Est enim $+ 6a - 4a = + 2a$, & $- 4b + 2b = - 2b$.

De subtractione.

I.

6. Quemadmodum *additio* fit ope signi positivi $+$, ita contraria ratione, ope signi negativi $-$ *subtractio* perficitur. Nimirum una magnitudo alteri subtrahitur, cum ita mediante signo $-$ illæ simul junguntur, ut magnitudo, quæ subtrahi debet, consequatur; illa vero, cui debet subtractio fieri, signum $-$ præcedat. Ut si magnitudo b subtrahenda sit magnitudini a, scribendum est $a - b$.

I I.

7. In subtractione magnitudinum *complexarum* signa *positiva* magnitudinis subtrahendæ mutari debent in *negativa*, & vicissim *negativa* in *positiva*. Nimirum in subtractione magnitudinis $b + d$ a magnitudine a, scribendum est $a - b - d$. In subtractione vero magnitudinis $b - d$ a magnitudine x scribendum est $x - b + d$; cujus ratio est, quia in primo casu tota summa $b + d$ debet subtrahi; in altero vero non debet subtrahi, nisi excessus, quo magnitudo b magnitudinem d excedit. Pro subtractione magnitudinum *coefficientibus* affectarum, animadvertenda sunt, quæ diximus §. 5., ubi notandum, pro *coefficiente* magnitudinis nulla nota numerica ad sinistram affectæ unitatem semper intelligi, videlicet a perinde esse ac $1a$; sicuti & dm perinde ac $1dm$.

De multiplicatione.

I.

8. Una magnitudo *incomplexa* per aliam in *Algebra* multiplicatur, cum nullo interjecto signo simul junguntur. Sic a multiplicatur per b, cum scribitur ab. Unde ab exprimit productum, quod oritur ex ductu magnitudinis a in magnitudinem b, sicuti etim mxy productum designat, quod ex trium magnitudinum m, x, y multiplicatione efficitur.

II.

9. Perinde porro est, quocunque ordine literæ in producto Algebrico sibi mutuo apponantur. Videlicet productum abd non differt a producto bda, neque a producto dab. Cum enim idem semper emergat productum, sive 3 per 4, sive 4 per 3 multiplicetur, idem quoque erit productum, sive a per b, & ab per d multiplicetur, sive b in a, & ba in d ducatur.

III.

10. Si eadem litera pluries, quam *bis*, in eodem producto occurrat, semel tantum in illo scribenda est. Verum paulo altius post ipsam, nota numerica illi appingi debet, quæ exprimat, quoties eadem litera in tali producto contineatur. Nimirum loco producti aaa, scribendum est a^3. Hujusmodi autem numerus *exponens* dicitur, quatenus nempe exprimit factum ex ipsa litera tot vicibus, una minus, in seipsam ducta, quot unitates in illo numerantur. Sic numerus 3 in magnitudine a^3 designat productum, quod duplici multiplicatione perficitur, videlicet ex a, per a, & ex producto aa iterum per a.

IV.

11. Hinc numeri *exponentes* in multiplicatione terminorum

rum similium debent simul colligi, & summa eidem literæ appingi. Ut si multiplicari debeat a^3 per a^2, facta summa 5 *exponentium* 3, 2, scribendum est a^5. Cum enim a^3 non differat ab *aaa*, & a^2 ab *aa* (§. 10.) & productum ex *aaa* in *aa* fit *aaaaa* (§. 8.), productum quoque ex a^3 in a^2 erit a^5. Si vero termini sint dissimiles, jungi debent in multiplicatione absque ulla operatione circa eorum *exponentes*. Sic productum ex a^3 in b^2 erit $a^3 b^2$.

V.

12. Si magnitudo *complexa* per *incomplexam* multiplicanda est, magnitudo *incomplexa* in singulos terminos complexæ magnitudinis duci debet, & producta partialia iisdem signis simul debent uniri, quibus simul copulati sunt termini magnitudinis multiplicatæ. Sic productum ex magnitudine $a + b - d$ ducta in magnitudinem x, erit $ax + bx - dx$. Non enim tota una magnitudo per aliam multiplicatur, nisi singulæ illius partes in ipsam ducantur.

VI.

13. Quod si tam magnitudo multiplicans, quam magnitudo multiplicanda, *complexæ* fuerint, singuli termini unius in singulos terminos alterius duci debent. Verum ratione signorum, quibus afficiuntur, hæc sunt observanda.

I. + per + reddit +

Ut si multiplicandum sit $+a$ per $+b$, productum erit $+ab$.

II. + per − reddit −.

Nimirum productum ex $+a$ per $-b$ erit $-ab$.

III. − per + reddit −.

Videlicet productum ex $-a$ per $+b$ erit $-ab$.

IV. − per − reddit +.

Factum scilicet ex $-a$ in $-b$ erit $+ab$.

Itaque productum, quod fit ex multiplicatione magnitudinis $a + b - d$ per magnitudinem $m - n + p$, constabit ex tribus productis partialibus, nimirum primo ex producto $ma + mb - md$, quod nascitur ex multiplicatione totius

$a+b-d$ per terminum m, sive $+m$ (terminus enim nullo signo affectus pro positivo habetur). Secundo ex producto $-na-nb+nd$, quod fit ex toto $a+b-d$ ducto in $-n$. Tertio ex producto $+ap+bp-dp$, quod ex multiplicatione totius $a+b-d$ per $+p$ efficitur. Quamobrem productum totale erit $ma+mb-md-na-nb+nd+ap+bp-dp$. Horum omnium rationem dedimus in *Algebræ Synopsi* §. 52. *& seq.*

VII.

14. Ceterum multiplicatio fit etiam simul copulando magnitudines, quæ inter se mutuo multiplicari debent, ope signi $\times$. Sic $a\times b$ designat factum ex magnitudine a ducta in magnitudinem b, seu magnitudinem a ducendam esse in magnitudinem b, sicuti etiam $\overline{a+b}\times\overline{d-e}$ indicat, complexam magnitudinem $a+b$ per magnitudinem $d-e$ multiplicari debere; atque adeo factum exprimit, quod ex harum magnitudinum multiplicatione emergit.

De divisione.

I.

15. *Divisio* unius magnitudinis per aliam exprimitur, magnitudini dividendæ dividentem, ducta lineola, instar fractionis, subscribendo. Sic fractio $\frac{a}{b}$ divisionem designat magnitudinis a per magnitudinem b, atque ipsius divisionis *quotum* exprimit, quemadmodum fractio numerica $\frac{8}{2}$ in vulgari Arithmetica indicat divisionem numeri 8 per numerum 2, nec non ejusdem divisionis *quotum*.

II.

16. Plerumque tamen loco Algebricæ fractionis *quotum* unius

unius magnitudinis per alteram divisæ indicantis, integra aliqua magnitudo in calculo assumitur, & tunc dicitur una magnitudo alteri in calculo substitui. Ut, si loco fractionis $\frac{a}{b}$, qua divisio exprimitur magnitudinis *a* per magnitudinem *b*, assumatur quantitas *m*, hæc dicitur substitui fractioni $\frac{a}{b}$, eique ponitur æqualis; unde scribitur $\frac{a}{b} = m$, & ipsa quantitas *m* spectatur, veluti *quotus* magnitudinis *a* per magnitudinem *b* divisæ.

III.

17. Quoniam vero in omni divisione, *quoto* per *divisorem* multiplicato, fit terminus divisus, propterea si magnitudo Algebrica dividenda omnes *divisoris* literas contineat, illis omnibus in ea deletis, quod superest, erit *quotus* divisionis. Sic *quotus* magnitudinis *abde* divisæ per magnitudinem *bd* erit *ae*, nimirum erit $\frac{abde}{bd} = ae$; quippe, si divisor *bd* per *ae* multiplicetur, emergit ipsa divisa magnitudo *abde* (§. 8.). Eadem ratione erit $\frac{am+bm}{a+b} = m$, cum itidem sit $\overline{a+b} \times m = am+bm$ (§. 12).



De

De variis magnitudinum Algebricarum gradibus.

I.

18. Magnitudo Algebrica *unius dimensionis* dicitur illa, quæ ex aliis in se invicem ductis non consurgit. Hujusmodi sunt magnitudines a, $b+d$, $c-m+x$ &c. Magnitudo *duarum dimensionum* ea vocatur, quæ ex una simplici magnitudine in alteram ducta efficitur, ut ab. Illa vero *trium dimensionum* vocari solet, quæ fit ex ductu trium magnitudinum simplicium inter se mutuo, ut abd. Hinc magnitudo *unius dimensionis* respondet *lineæ*, magnitudo *duarum dimensionum* respondet *superficiei*, & magnitudo *trium dimensionum* respondet *corpori*.

I I.

19. Si una magnitudo semel in seipsam ducatur, fit productum, quod dicitur *quadratum*, & *potestas secunda*, ut aa, bb &c. Magnitudo vero, ex qua *potestas* ipsa efficitur, *radix quadrata* nuncupatur. Sic magnitudo a est *radix quadrata* magnitudinis aa. Oritur quippe aa ex quantitate a semel ducta in seipsam.

I I I.

20. *Potestas tertia*, quæ etiam *cubus* dicitur, est magnitudo consurgens ex multiplicatione magnitudinis *quadratæ* per suam *radicem*. Hujusmodi est quantitas aaa, utpote quæ oritur ex ductu quadrati aa in suam radicem a. Ipsa autem radix a, si cum producto aaa comparetur, dicitur *radix cubica*.

AXIO-

AXIOMATA GENERALIA MATHESEOS.

21. *Totum* dicitur illa magnitudo, quæ ex pluribus aliis simul sumtis consurgit. *Pars* vero magnitudo illa vocatur, quæ simul cum aliis sumta, totum constituit. Hæc duplex est, *aliquota*, & *aliquanta*. Prior est illa, quæ aliquoties sumta suum adæquat totum. Posterior vero, quæ aliquoties sumi nequit, quin vel suum totum excedat, vel ab illo deficiat. Sic numeri 9 pars *aliquota* est numerus 3, *aliquanta* vero numerus 4. Nam 3 *ter* sumtus adæquat numerum 9. At numerus 4 *bis* sumtus ab illo deficit; si vero *ter* sumatur, ipsum excedit.

AXIOMA I.

22. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis*; & vicissim *omnes partes simul sumtæ adæquant totum*.

AXIOMA II.

23. *Omne totum est majus una sui parte seorsim ab aliis sumta*; & vicissim *qualibet pars est minor toto*.

AXIOMA III.

24. *Magnitudines, quæ eidem, vel æqualibus sunt æquales, inter se quoque sunt æquales. Quæ vero æquales sunt inæqualibus, sunt inter se inæquales*.

AXIOMA IV.

25. *Magnitudo, quæ uni æqualium æqualis est, alteri quoque est æqualis; & si una duarum æqualium fuerit uni æqualis, etiam altera eidem æqualis erit*.

AXIO-

AXIOMA V.

26. *Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.*

AXIOMA VI.

27. *Si æqualibus æquales partes ſubducantur, reſidua ſunt æqualia.*

AXIOMA VII.

28. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota, quæ fiunt, ſunt inæqualia.*

AXIOMA VIII.

29. *Si inæqualibus æqualia ſudbucantur, quæ remanet, ſunt inæ ualia.*



ELEMENTA MATHESEOS.

IN hisce tradendis elementis a *proportionum* scientia initium sumimus. Hæc enim quanti in universa Mathesi momenti sit, nemo est vel levissime in ea versatus, qui ignoret. Omnes certe Matheseos partes adeo ab illa dependent, ut in ipsis nihil prorsus tradatur pulchri atque utilis, quod a *proportionum* doctrina non derivetur. Viribus itaque omnibus enitendum est, ut accuratius, quo fieri potest, ea percipiantur, quæ hac in parte traduntur.

SECTIO PRIMA.

De proportione, & proportionalitate magnitudinum in genere.

DEFINITIO I.

30. P*Roportio, sive ratio duarum magnitudinum est habitudo unius ad aliam, quatenus nempe earum una certo quodam modo alteram continet, vel in illa continetur*. Sic numerus 8, quatenus *bis* continet numerum 4, & *ter* in numero 24 continetur, dicitur aliquam ad utrumque *rationem*, sive *proportionem* habere. Necesse idcirco est, ut magnitudines, quæ inter se mutuo comparantur, sint ejusdem generis, nempe tales, ut una aliquoties sumta, alteram excedere possit.

COROLLARIUM.

31. Hinc *proportio duarum magnitudinum divisionis ope di*-

guo-

gnoscitur. Per divisionem enim palam fit, quoties una alteram contineat. Nam magnitudo divisa eo modo continet magnitudinem dividentem, vel in illa continetur, quo divisionis *quotus* continet unitatem, vel in unitate comprehenditur.

DEFINITIO II.

32. *Antecedens proportionis est illa magnitudo, quæ ad aliam refertur. Consequens vero illa, ad quam refertur*. Ut si determinanda sit *proportio* magnitudinis *a* ad magnitudinem *b*, magnitudo *a* erit *antecedens* proportionis; *consequens* vero magnitudo *b*.

Hypothesis.

33. Proportio duarum magnitudinum exprimitur per fractionem, cujus *numerator* sit *antecedens* proportionis; *denominator* vero illius *consequens*. Sic fractio $\frac{a}{b}$ rationem exprimit magnitudinis *a* ad magnitudinem *b*.

DEFINITIO III.

34. *Exponens*, sive *denominator proportionis est quantitas integra, vel fracta modum exprimens, unitati comparata, quo antecedens proportionis consequentem continet, vel in illo continetur*. Sic numerus 2 est *exponens* rationis, quam habet 6 ad 3; quippe designat, numerum 6 *bis* numerum 3 comprehendere. Similiter fractio $\frac{1}{3}$ est *exponens* rationis numeri 2 ad numerum 6; nam palam efficit, *antecedentem* 2 esse unam tertiam partem *consequentis* 6, sive *ter* in *consequente* 6 comprehendi.

COROL-

COROLLARIUM.

35. *Exponens propterea rationis cujuscunque non differt a quoto termini antecedentis per consequentem divisi*; atque adeo cum terminus *divisus* eo modo respiciat *divisorem*, quo divisionis *quotus* respicit *unitatem*, ut patet ex Arithmeticis, *antecedens proportionis erit ad consequentem, ut est illius exponens ad unitatem.*

DEFINITIO IV.

36. *Proportio* vel *æqualitatis* est, vel *inæqualitatis*. *Prior est habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram adæquat. Posterior vero est habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram superat.* Hæc dividitur in *rationalem*, & *irrationalem*. *Rationalis est illa, quæ numeris exprimi potest. Irrationalis vero ea est, quæ numeris designari nequit.* Rationalis dividitur in *proportionem majoris inæqualitatis*, & *minoris inæqualitatis*. *Proportio majoris inæqualitatis est habitudo majoris magnitudinis ad minorem. Proportio vero minoris inæqualitatis est proportio magnitudinis minoris ad majorem.* Sic ratio numeri 6. ad numerum 3 est *majoris inæqualitatis*; *minoris* vero ratio numeri 3 ad numerum 6.

DEFINITIO V.

37. Proportionis *majoris inæqualitatis* quinque numerantur species, scilicet *multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex superparticularis*, & *multiplex superpartiens*. *Ratio multiplex est, cum major magnitudo aliquoties minorem adæquate continet*, ut ratio 6 ad 3, quæ dicitur *dupla*; ratio 6 ad 2, quæ dicitur *tripla* &c. *Ratio superparticularis est, quando major magnitudo semel minorem continet, & unam illius partem aliquotam*, ut ratio numeri 3 ad numerum 2. *Ratio superpartiens est, quando major semel continet minorem, & aliquot partes illius aliquotas, quæ tamen simul sumtæ unam partem illius*

ali-

aliquotam non constituunt, ut ratio numeri 5 ad numerum 3. *Ratio multiplex superparticularis est, quando major aliquoties continet minorem, & unam insuper partem illius aliquotam*, ut ratio numeri 10. ad 3. *Ratio demum multiplex superpartient est, cùm major magnitudo aliquoties continet minorem, & plures illius partes aliquotas, unam aliquotam, si simul sumantur, minime conficientes*, ut ratio numeri 11 ad numerum 3. Tot quoque sunt species *proportionis minoris inæqualitatis*, eodemque modo denominantur, addita dumtaxat particula *sub*. Videlicet, sicuti ratio numeri 6 ad numerum 3 dicitur *dupla*, ita vicissim ratio numeri 3 ad númerum 6 *subdupla* nuncupatur, atque ita de ceteris.

DEFINITIO VI.

38. *Duæ rationes dicuntur* similes, *sive* æquales, *cum antecedentes earum termini eodem modo continent suos consequentes, vel in illis continentur*. Sic *ratio* numeri 12 ad numerum 4 *similis*, se *æqualis* est rationi numeri 6 ad numerum 2. Ut enim *antecedens* 12 *ter* continet suum *consequentem* 4, ita *antecedens* 6 suum *consequentem* 2 *ter* comprehendit.

COROLLARIUM.

39. *Illæ ergo rationes erunt æquales inter se, quæ habent exponentes æquales. Et si duæ rationes æquales inter se fuerint, earum quoque exponentes erunt æquales.*

DEFINITIO VII.

40. *Duarum rationem illa dicitur* major, *cujus antecedens magnis suum consequentem continet, vel minus in suo consequente continetur, quam alterius antecedens suum consequentem contineat, vel in illo comprehendatur*. Sic ratio numeri 8. ad 2 *major* est ratione numeri 6 ad 3; quia numerus 8 pluries continet 2, quam numerus 6 contineat 3. Vicissim ratio numeri 2 ad 8 est

est *minor* ratione numeri 3 ad 6. Nam numerus 2 pluries continetur in numero 8, quam numerus 3 contineatur in numero 6.

COROLLARIUM.

41. *Ea idcirco ratio major est, quæ majorem exponentem habet. Et si una ratio major altera fuerit, illius quoque exponens major erit.*

DEFINITIO VIII.

42. *Partes similes dicuntur illæ, quæ eandem ad suum totum rationem habent.* Sic numeri 2, 3 sunt *partes similes* numerorum 6, 9; cum ratio numeri 2 ad numerum 6 sit *æqualis* rationi, quam habet numerus 3 ad numerum 9 (§.38).

DEFINITIO IX.

43. *Proportionalitas Geometrica*, quam Græci *analogiam* appellant, *est rationum similitudo*, sive *æqualitas*. Quatuor idcirco magnitudines dicuntur *geometrice proportionales*, *cum ratio primæ ad secundam diversa ab ea non est, quam habet tertia ad quartam*. Hujusmodi sunt numeri 12, 6, 8, 4; cùm scilicet *dupla* sit tam ratio primi ad secundum, quam ratio tertii ad quartum. Salva tamen esse potest *proportionalitas geometrica* etiam in tribus tantum terminis; cum possit esse primus ad secundum, ut est ipse secundus ad tertium, sicuti manifeste patet in tribus numeris 12, 6, 3.

COROLLARIUM I.

44. *Si ergo exponens rationis, quam habet prima quatuor magnitudinum ad secundam, fuerit æqualis exponenti rationis, quam habet illarum tertia ad quartam, illæ quatuor magnitudines erunt geometrice proportionales.* Et vicissim, *si quatuor magnitudines proportionales fuerint, exponens rationis primæ ad secundam æquabit exponentem rationis tertiæ ad quartam* (§.39.).

COROLLARIUM II.

45. *Si prima quatuor magnitudinum geometrice proportionalium fuerit æqualis, vel major, aut minor secunda, etiam tertia erit æqualis, vel major, aut minor quarta.*

Hypothesis II.

46. Proportionalitas geometrica quatuor magnitudinum *a, b, c, d* hoc modo exprimitur *a.b=c.d*. Plerique tamen loco signi æqualitatis =; adhibent signum ::, scribuntque *a.b::c.d*.

DEFINITIO X.

47. Quatuor magnitudines dicuntur inter se *directe* proportionales, *si fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam. Si vero fuerit quarta ad tertiam, ut prima ad secundam*, proportionales *reciproce* nuncupantur.

DEFINITIO XI.

48. *Si prima quatuor magnitudinum fuerit ad secundam, ut ipsa secunda ad tertiam, & secunda ad tertiam, ut tertia ad quartam*, illæ quatuor magnitudines dicuntur *continuo* proportionales. At vero *discrete* tantum proportionales, si nonnisi prima fuerit ad secundam, ut tertia ad quartam. Sic *continuo* proportionales sunt quatuor numeri 24. 12. 6. 3. *Discrete* vero quatuor 12. 6. 8. 4. Secunda & tertia quatuor magnitudinum *continuo* proportionalium dicuntur *duæ mediæ continuo proportionales*. *Media* vero *continuo proportionalis* dicitur secunda trium *continuo* proportionalium. Ubicumque tamen terminorum proportionalium mentio fit, *discreta* semper *proportionalitas* intelligitur, nisi ly *continuo* expresse ponatur.

Hypo-

Hypotheſis.

49. Proportionalitas *continua* indicatur ſigno $\div$ ipſis magnitudinibus præfixo. Videlicet ad indicandam *continuam proportionalitatem* quatuor magnitudinum *a*, *b*, *c*, *d*, ſcribitur $\div a.b.c.d.$

SCHOLION.

50. Datur etiam alia *proportionalitatis* ſpecies, quæ *Arithmetica* dicitur. Ea non aliud eſt, niſi *differentiarum æqualitas*. Videlicet quatuor magnitudines dicuntur *Arithmetice proportionales*, ſi exceſſus primæ ſupra ſecundam fuerit æqualis exceſſui tertiæ ſupra quartam, ut patet de quatuor numeris 16. 10. 8. 2. Quod ſi omnium exceſſus, nimirum primæ ſupra ſecundam, ſecundæ ſupra tertiam, & tertiæ ſupra quartam, æquales inter ſe fuerint, qua ratione ſe habent numeri 12. 10. 8. 6, *continuo arithmetice proportionales* nuncupantur. *Diſcrete* vero, ſi ſecus ſe habuerint, ut de *geometrica proportionalitate* diximus.

DEFINITIO XII.

61. *Magnitudines homologæ*, ſive *ratione ſimiles*, *dicuntur illæ*, *quæ eandem ad ſuos conſequentes terminos rationem habent.* Ut ſi fuerit $A.a = B.b$, termini A, B dicentur *homologi*.

COROLLARIUM

52. *In omni ergo proportionalitate geometrica termini antecedentes ſunt homologi.*

DEFINITIO XIII.

53. *Ratio ex aliis compoſita vocatur illa*, *cujus exponens eſt factum ex aliarum exponentibus inter ſe multiplicatis*: ut ſi ex-

ponens rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & rationis $\frac{d}{e}$ fuerit n, ratio, cujus *exponens* sit mn, erit composita ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{e}$.

DEFINITIO XIV.

54. *Ratio duplicata dicitur illa, quæ ex duabus; triplicata, quæ ex tribus rationibus æqualibus componitur*. Ut si ratio $\frac{m}{n}$ fuerit composita ex duabus æqualibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ratio $\frac{m}{n}$ erit *duplicata* rationis $\frac{a}{b}$. Similiter, si æquales inter se fuerint tres rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, atque ex his composita sit ratio $\frac{x}{y}$ hæc dicetur *triplicata* rationis $\frac{a}{b}$.

COROLLARIUM.

55. Itaque posita quantitate z pro *exponente* rationis $\frac{a}{b}$, magnitudo m erit ad n in ratione *duplicata* magnitudinis a ad b, si *exponens* rationis $\frac{m}{n}$ fuerit zz, productum scilicet, quod emergit ex *exponente* z semel ducto in seipsum. Similiter magnitudo x erit ad magnitudinem y in ratione *triplicata* ejusdem a ad b, si *exponens* rationis $\frac{x}{y}$ fuerit productum ex *exponente* z rationis $\frac{a}{b}$ multiplicato per *exponentem* zz ejusdem rationis $\frac{a}{b}$ *duplicatæ*, nempe si fuerit quantitas zzz.

Co-

COROLLARIUM II.

56. Hinc *exponens rationis* duplicatæ *est quadratum*; *exponens vero rationis* triplicatæ *est cubus exponentis datæ rationis*.

DEFINITIO XV.

57. *Duæ magnitudines dicuntur esse in ratione* subduplicata *aliarum duarum, cum ea est ipsarum ratio, ut, si semel in seipsam ducatur, ratio duarum illarum datarum magnitudinum consurgat. Dicuntur vero esse in ratione* subtriplicata, *cum earum ratio hujusmodi est, ut ducta in seipsam* duplicatam, *datarum rationem efficiat*. Videlicet magnitudo a erit ad magnitudinem b in ratione *subduplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n, si ex ratione $\frac{a}{b}$ semel ducta in seipsam fiat ratio $\frac{m}{n}$. Erit vero a ad b in ratione *subtriplicata* duarum x, y, si ex ratione $\frac{a}{b}$ ducta in seipsam *duplicatam* ratio $\frac{x}{y}$ consurgat.

COROLLARIUM I.

58. Itaque magnitudo a erit ad b in ratione *subduplicata* magnitudinum m, n, si semel multiplicato per seipsum *exponente* rationis $\frac{a}{b}$, fiat *exponens* rationis $\frac{m}{n}$. Erit vero a ad b in ratione *subtriplicata* duarum x, y, si ducto *exponente* rationis $\frac{a}{b}$ in *exponentem* ipsius rationis $\frac{a}{b}$ *duplicatæ*, consurgat *exponens* rationis $\frac{x}{y}$.

COROLLARIUM II.

59. Ex quo apparet, *exponentem rationis subduplicatæ esse* radi-

radicem quadratam; *rationis vero ſubtriplicatæ eſſe* radicem cubicam *exponentis rationis datæ*.

COMPARATIONES
Terminorum proportionalium.

60. Termini proportionales modo multiplici comparari ſeu permiſceri inter ſe mutuo poſſunt, quin deſinant eſſe proportionales, videlicet *invertendo*, *alternando*, *componendo*, *dividendo*, *convertendo*, & quidem dupliciter, nimirum per *compoſitionem*, & *diviſionem rationis*, ac demum ex *æqualitate rationis* tam *ordinate*, quam *perturbate*.

I.

61. Permiſcentur *invertendo*, cum termini conſequentes, veluti antecedentes, ad antecedentes, veluti ad conſequentes, referuntur; ut cum poſita analogia $A . a = B . b$, oſtenditur eſſe $a . A = b . B$.

II.

62. *Alternando*, cum antecedens ad antecedentem, & conſequens ad conſequentem referuntur. Ut, ſi fuerit $A . a = B . b$, arguitur *alternando*, cum evincitur eſſe $A . B = a . b$.

III.

63. *Componendo*, cum ſumma ex antecedente & conſequente ad conſequentem refertur: ut cum oſtenditur eſſe $A + a . a = B + b . b$, ſi fuerit $A . a = B . b$.

IV.

64. *Dividendo*, cum exceſſus antecedentis ſupra conſequentem cum ipſo conſequente comparatur, videlicet cum, poſita analogia $A . a = B . b$, demonſtratur eſſe $A - a . a = B - b . b$.

65. *Con-*

V.

65. *Convertendo ex compositione rationis*, cum antecedens & consequens instar unius ad antecedentem referuntur; ut cum, si fuerit A.a=B.b, evincitur esse A + a. A = B + b. B.

VII.

66. *Convertendo ex divisione rationis*, cum excessus antecedentis supra consequentem ad antecedentem refertur, nimirum cum evincitur esse A − a. A = B − b. B, si fuerit A. a=B.b.

VII.

67. Demum ex *aqulitate rationis ordinate*, cum posita duplici serie magnitudinum A.B.C, a.b.c, quarum prima A sit ad secundam B in una serie, ut prima a ad secundam b in altera serie, utque secunda b ad tertiam c, ita sit secunda B ad tertiam C, atque ita de ceteris, demonstratur esse primam A ad ultimam C, ut prima a ad ultimam c. Ex *æqualitate* vero *rationis perturbate*, cum itidem, posita duplici serie magnitudinum A. B. C, a.b.c ita se habentium, ut prima A sit ad secundam B, sicuti antepenultima b ad ultimam c; & ut a ad b, ita sit B ad C, demonstratur adhuc esse primam A ad ultimam C, quemadmodum est prima a ad ultimam c.

AXIOMATA
ad doctrinam proportionum spectantia.

Quæ hoc loco exibemus, demonstrata habentur lib. I. *Elementorum*. Ea autem hic assumimus veluti *per se nota*, quod vere, vel levissima attentione adhibita, cuique pateant.

AXIOMA I.

68. *Si eadem magnitudo ducatur seorsim in æquales, aut æ-*

quales magnitudines per eandem, vel per æquales multiplicentur, producta emergunt æqualia.

AXIOMA II.

69. *Si eadem magnitudo per æquales, aut æquales per eandem, vel per æquales dividantur, quoti sunt æquales.*

AXIOMA III.

70. *Magnitudines æquales eandem ad eundem, vel ad æquales terminos rationem habent;* & viciſſim, *quæ ad eundem vel ad æquales terminos eandem rationem habent, ſunt æquales.*

AXIOMA IV.

71. *Eadem eſt ratio ejuſdem magnitudinis ad æquales terminos;* & viciſſim *illi termini ſunt æquales, ad quos eandem magnitudo eandem rationem habet.*

Lemma I. fundamentale.

In omni ratione ſi conſequens per exponentem multiplicetur, productum efficitur antecedenti termino æquale.

72. *Exponens* rationis magnitudinis a ad magnitudinem b ſit m. Dico, eſſe $bm = a$.

Demonſtratio.

Exponens m non differt a *quoto* antecedentis a per conſequentem b diviſi (§. 35.). Conſtat autem ex Arithmeticis, in omni diviſione, ſi *quotus* per *diviſorem* multiplicetur, fieri terminum diviſum. Ergo etiam in omni proportione, multiplicato conſequente per *exponentem*, antecedens ipſius terminus efficitur; atque adeo erit $bm = a$, ſi fuerit $\frac{a}{b} = m$.

Lem-

Lemma II. fundamentale.

Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales, productum extremarum æquabit productum mediarum.

73. Esto $a . b = c . d$. Dico, esse $ad = bc$.

Demonstratio.

Cum enim sit $a . b = c . d$, si ponatur $\frac{a}{b} = m$, erit etiam $\frac{c}{d} = m$ (§. 39). Est autem $bm = a$, & $dm = c$ (§. 72). Ergo erit quoque $bm \times d = a \times d$, & $dm \times b = c \times b$, sive $bmd = ad$, $dmb = cb$ (§. 68); ac proinde $ad = cb$ (§. 24.); cum sit $bmd = dmb$ (§. 9).

COROLLARIUM.

74. *Si fuerint tres magnitudines continuo geometrice proportionales, productum extremarum erit æquale quadrato mediæ.* Erit nempe $bb = ad$, si fuerit $\div a . b . d$. Est enim $\div a . b . d$ idem ac $a . b = b . d$.

Lemma III. fundamentale.

Si productum duarum extremarum fuerit æquale producto duarum mediarum, quatuor ipsæ magnitudines erunt geometrice proportionales.

75. Productum ad extremarum a, d quatuor magnitudinum a, b, c, d sit æquale producto bc mediarum b, c. Dico, esse $a . b = c . d$.

Demonstratio.

Ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$; adeoque sit $bm = a$, $dn = c$ (§. 72). Erit igitur $bmd \times d = a \times d$, sive $bmd = ad$, & $dn \times b$ $= c$

$= c \times b$, sive $dnb = bc$ (§. 68). Est autem $ad = bc$ ex hypothesi. Ergo erit etiam $bmd = dnb$ (§. 24). Constat autem, esse $\frac{bmd}{bd} = \frac{dnb}{bd}$ (§. 69.); & $\frac{bmd}{bd} = m$, $\frac{dnb}{bd} = n$ (§. 17). Ergo erit $m = n$. Quotus autem m est *exponens* rationis $\frac{a}{b}$, & quotus n est *exponens* rationis $\frac{c}{d}$ (§ 35). Ergo erit $a.b = c.d$ (§. 39).

COROLLARIUM.

76. *Si, positis tribus magnitudinibus, productum extremarum fuerit æquale quadrato mediæ, tres ipsæ magnitudines erunt continuo geometrice proportionales*. Videlicet, si fuerit $ad = bb$, erit $\div a.b.d$. Non enim potest esse $ad = bb$, quin sit $a.b. = b.d$.

THEOREMA I.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem multiplicentur, producta erunt directe, ut ipsæ magnitudines multiplicatæ.

77. Duæ inæquales magnitudines a, b multiplicentur per eandem d. Dico, esse $ad.bd = a.b$.

Demonstratio.

Cum enim sit $adb = bda$ (§. 9.), erit $ad.bd = a.b$ (§. 75).

COROLLARIUM.

78. *Si quatuor magnitudines proportionales per eandem multiplicentur, producta erunt inter se proportionalia*. Ut, si fuerit $a.\ b = c.\ d$, erit etiam $am.\ bm = cm.\ dm$. Cum enim sit $am.\ bm = a.\ b$, $cm.\ dm = c.d$ (§. 77), & ex hypothesi $a.\ b = c.\ d$, erit quoque $am.\ bm = cm.\ dm$ (24).

COROL-

COROLLARIUM II.

79. *Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per eandem quantitatem multiplicentur, producta erunt inter se, ut tertia ad quartam.* Nimirum, si fuerit $a.b = c.d$, erit etiam $am.bm = c.d$. Quippe, cum sit $am.bm = a.b$ (§. 77.) & $a.b = c.d$, erit itidem $am.bm = c.d$ (§. 25).

COROLLARIUM III.

80. *Si prima & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem multiplicentur, per aliam vero tertia & quarta, producta erunt proportionalia.* Posita nimirum analogia $a.b = c.d$, factaque multiplicatione duorum terminorum a, b per m, & duorum c, d per n, erit $am.bm = cn.dn$. Est enim $am.bm = a.b$, & $cn.dn = c.d$ (§. 77). Ergo, cum sit $a.b = c.d$, erit etiam $am.bm = cn.dn$ (§. 24.)

THEOREMA II.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem quantitatem dividantur, quoti erunt directe, ut ipsæ magnitudines divisæ.

81. Duæ inæquales magnitudines a, b dividantur per eandem e, sitque $\frac{a}{e} = m$, & $\frac{b}{e} = n$. Dico, esse $m.n = a.b$.

Demonstratio.

Enim vero, cum sit $em = a$, & $en = b$ (§. 72), erit $emn = an$, & $enm = bm$ (§. 68). Est autem $emn = enm$ (§. 9). Ergo erit etiam $an = bm$, sive $mb = na$ (§. 24); adeoque $m.n = a.b$ (§. 75).

Co-

COROLLARIUM I.

82. *Si quatuor magnitudines proportionales per eandem dividantur, quoti erunt proportionales.* Nimirum posita analogia $a . b = c . d$, divisisque omnibus terminis per eandem quantitatem e, adeo ut sit $\frac{a}{e} = m$, $\frac{b}{e} = n$, $\frac{c}{e} = p$, & $\frac{d}{e} = q$, erit $m . n = p . q$. Constat enim, esse $m . n = a . b$, sicuti etiam $p . q = c . d$ (§.81). Ergo, cum sit $a . b = c . d$, erit quoque $m . n = p . q$ (§.24).

COROLLARIUM II.

83. *Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium per eandem quantitatem dividantur, quoti erunt directe, ut tertia ad quartam.* Ut si, posita analogia $a . b = c . d$, magnitudines a, b dividantur per eandem quantitatem e, fueritque $\frac{a}{e} = m$, $\frac{b}{e} = n$, erit $m . n = c . d$. Cum enim sit $m . n = a . b$ (§.81), & $a . b = c . d$ per hypothesim, erit quoque $m . n = c . d$ (§.25).

COROLLARIUM III.

84. *Si prima, & secunda quatuor magnitudinum proportionalium dividantur per unam quantitatem, per aliam vero tertia, & quarta, quoti erunt proportionales.* Videlicet posita analogia $a . b = c . d$, divisisque terminis a, b per m, & c, d per n, ita ut sit $\frac{a}{m} = p$, $\frac{b}{m} = q$, $\frac{c}{n} = x$, & $\frac{d}{n} = y$, erit $p . q = x . y$. Est enim $p . q = a . b$, & $x . y = c . d$ (§. 81). Ergo, quemadmodum est $a . b = c . d$, erit etiam $p . q = x . y$ (§. 24).

THEO-

THEOREMA III.

Si eandem magnitudo per duas inæquales dividatur, quoti erunt suis divisoribus reciproce proportionales.

85. Magnitudo a dividatur primo per b, deinde per c, sitque $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{a}{c} = n$. Dico, esse $m . n = c . b$.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit tam bm, quam $cn = a$ (§. 72), erit $bm = cn$ (§. 24); adeoque $m . n = c . b$ (§. 75).

THEOREMA IV.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales multiplicentur, producta erunt proportionalia.

86. Esto $A . a = B . b$, & $D . d = E . e$. Dico, esse etiam $AD . ad = BE . be$.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim sit $Ab = aB$, & $De = dE$ (§. 73), erit quoque $AbDe = aBdE$ (§. 68). Est autem $AbDe$ productum extremarum AD, be, & $aBdE$ est productum mediarum ad, BE. Ergo erit $AD . ad = BE . be$ (§. 75).

COROLLARIUM.

87. *Si prima & tertia quatuor magnitudinum proportionalium multiplicentur per unam quantitatem, per aliam vero secunda & quarta, producta erunt proportionalia.* Ut si, posita analogia $A . a = B . b$, duo termini A, B multiplicentur per M, & duo a, b per m, erit $AM . am = BM . bm$. Est enim $M . m = M . m$.

THEO-

THEOREMA V.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales dividantur, quoti erunt proportionales.

88. Esto $A . a \coloneqq B . b$, & $D . d \coloneqq E . e$. Ponatur autem $\frac{A}{D} \coloneqq m$, $\frac{a}{d} \coloneqq n$, $\frac{B}{E} \coloneqq x$, & $\frac{b}{e} \coloneqq y$. Dico, esse $m . n \coloneqq x . y$.

Demonstratio.

Enimvero, cum propter hypothesim sit $Ab \coloneqq aB$, & $De \coloneqq dE$ (§. 73.), erit $\frac{Ab}{De} = \frac{aB}{dE}$, sive $my \coloneqq nx$ (§. 69). Igitur erit $m . n \coloneqq x . y$ (§. 75.)

COROLLARIUM.

89. *Si prima & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem dividantur, per aliam vero secunda & quarta, quoti erunt proportionales.* Ut si, posita analogia $A . a \coloneqq B . b$, termini A, B dividantur per M, & termini a, b per m, adeout sit $\frac{A}{M} = p$, $\frac{B}{M} = q$, $\frac{a}{m} = x$, $\frac{b}{m} \coloneqq y$, erit $p . x \coloneqq q . y$. Constat enim, esse $M . m \coloneqq M . m$.

THEOREMA VI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam invertendo, proportionales erunt.

90. Esto $A . a \coloneqq B . b$. Dico, etiam *invertendo*, esse $a . A \coloneqq b . B$.

Demonstratio.

Quippe, cum propter hypothesim sit $Ab \coloneqq aB$ (§. 73); sitque Ab productum mediarum A, b, & a B productum extremarum a, B, erit $a . A \coloneqq b . B$ (§. 75).

Co-

COROLLARIUM.

91. *In omni ergo proportionalitate geometrica termini consequentes sunt homologi* (§. 51).

THEOREMA VII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam alternatim sumtæ proportionales erunt.

92. Esto $A . a \asymp B . b$. Dico, etiam *alternando*, esse $A . B \asymp a . b$.

Demonstratio.

Cum sit per hypothesim $Ab \asymp aB$ (§. 73), evidens est, esse $A . B \asymp a . b$ (§. 75).

COROLLARIUM I.

93. *Si prima quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis, aut major, vel minor tertia, etiam secunda erit æqualis, aut major, vel minor quarta.* Est enim prima ad tertiam, ut secunda ad quartam.

COROLLARIUM II.

94. *Partes similes duarum magnitudinum sunt directe, ut ipsæ magnitudines; & vicissim magnitudines totales, ut duæ quæcunque partes earum similes.* Ut si magnitudines a, b fuerint partes similes magnitudinum $A . B$, erit $a . b \asymp A . B$. Cum enim ex hypothesi sit $a . A \asymp b . B$ (§. 42), erit quoque $a . b \asymp A . B$ (§. 92).

THEO-

THEOREMA VIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam compositæ proportionales erunt.

95. Esto $A.a \sqsubset B.b$. Dico, etiam *componendo*, esse $A+a.a \sqsubset B+b.b$.

Demonstratio.

Quippe, cum ex hypothesi sit $Ab \sqsubset aB$ (§.73), erit $Ab + ab \sqsubset aB + ab$ (§.26.). Est autem $Ab + ab$ productum extremarum $A+a, b$, & $aB + ab$ est productum mediarum $a, B+b$ (§.12). Ergo erit $A+a.a \sqsubset B+b.b$ (§.75).

THEOREMA IX.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam divisæ proportionales erunt.

96. Esto $A.a \sqsubset B.b$. Dico, etiam *dividendo*, esse $A-a.a \sqsubset B-b.b$.

Demonstratio.

Stante hypothesi habetur $Ab \sqsubset aB$ (§.73). Igitur erit $Ab - ab \sqsubset aB - ab$ (§.27). Est autem $Ab - ab$ productum extremarum $A-a, b$, & $aB - ab$ est productum mediarum $a, B-b$ (§.12). Ergo erit $A-a.a \sqsubset B-b.b$ (§.75).

THEOREMA X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam compositæ per conversionem rationis proportionales erunt.

97. Esto $A.a \sqsubset B.b$. Dico, etiam *componendo per conversionem rationis*, esse $A+a.A \sqsubset B+b.B$.

Demonstratio.

Cum enim ex hypothesi sit $Ab \sqsubset aB$ (§.73), erit $Ab + AB \sqsubset aB$

$= aB + AB$ (§. 26). Constat autem, $Ab + AB$ esse productum mediarum $A, B + b$, & $aB + AB$ esse productum extremarum $A + a, B$ (§. 12). Ergo erit $A + a . A = B + b . B$ (§. 75).

THEOREMA XI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam divisæ per conversionem rationis proportionales erunt.

98. Esto $A . a = B . b$. Dico, etiam *dividendo* per *conversione rationis*, esse $A - a . A = B - b . B$.

Demonstratio.

Enimvero, cum propter hypothesim habeatur $Ab = aB$ (§. 73), habebitur etiam $AB - aB = AB - Ab$ (§. 27). Est autem $AB - aB$ productum extremarum $A - a$, B, & $AB - Ab$ est productum mediarum A, $B - b$ (§. 12). Ergo erit $A - a . A = B - b . B$ (§. 75).

THEOREMA XII.

Si fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ ordinatam vel perturbatam rationem habentes, ratio duarum extremarum ex una parte erit æqualis rationi duarum extremarum ex alia.

I.

99. Sint duæ series magnitudinum A, B, D; a, b, d *ordinatam* proportionem habentes. Esto nimirum $A . B = a . b$, & $B . D = b . d$. Dico, esse $A . D = a . d$.

Demonstratio.

Cum enim ex facta hypothesi sit $Ab = Ba$, & $Bd = Db$ (§. 73), erit $AbBd = BaDb$ (§. 68); & ideo $\frac{AbBd}{Bb} = \frac{BaDb}{Ba}$

 (§. 69.

(§. 69). Est autem $\frac{AbBd}{Bb} = Ad$, & $\frac{BaDb}{Ba} = Da$ (§. 17). Ergo erit $Ad = Da$; ac proinde $A.D = a.d$ (§. 75.)

II.

100. Sint modo duæ series A, B, D; *a, b, d perturbatam* inter se rationem habentes. Videlicet sit $A.B = b.d$, & $B.D = a.b$. Dico, esse $A.D = a.d$.

Demonstratio.

Quippe, cum ex hypothesi sit $Ad = Bb$, & $Bb = Da$ (§. 73), erit $Ad = Da$ (§. 24); & ideo $A.D = a.d$ (§. 75).

THEOREMA XIII.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, summa omnium antecedentium erit ad summam omnium consequentium, ut una antecedentium ad suam consequentem.

101. Esto $A.a = B.b = D.d$. Dico, esse $A + B + D . a + b + d = A.a$.

Demonstratio.

Cum enim sit $A.a = B.b = D.d$, facta hypothesi, ut sit $\frac{A}{a} = m$, erit quoque $\frac{B}{b} = m$, $\frac{D}{d} = m$ (§. 39); ac proinde $am = A$, $bm = B$, & $dm = D$ (§. 72); & ideo $am + bm + dm = A + B + D$. Est autem $\frac{am + bm - dm}{a + b + d} = m$ (§. 17). Ergo erit etiam $\frac{A + B + D}{a + b + d} = m$ (§. 69); ac propterea habebitur $A + B + D . a + b + d = A.a$ (§. 39).

Co-

COROLLARIUM.

102. *Si duabus magnitudinibus duæ similes partes addantur, tota erunt ipsis magnitudinibus similia.* Ut si magnitudines a, b fuerint similes duabus A, B, iisdem A, B similes quoque erunt summæ A + a, B + b. Enimvero, cum propter hypothesim sit A . B = a . b (§. 94.), erit quoque A + a . B + b = A . B (§. 101.)

THEOREMA XIV.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit etiam reliqua ad reliquam, ut tota ad totam.

103. Magnitudinibus A, B demantur partes a, b; sitque A . B = a . b. Dico, esse A − a . B − b = A . B.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit A . B = a . b, erit A . a = B . b (§. 92); ac propterea A − a . A = B − b . B (§. 98); necnon A − a . B − b = A . B (§. 92).

COROLLARIUM.

104. Cum ex hypothesi partes a, b sint similes magnitudinibus totalibus A, B (§. 94), perspicuum remanet, *partes similes suis totis sublatas relinquere partes similes.*

THEOREMA XV.

Si antecedentes plurium rationum termini, sicuti etiam illarum consequentes, inter se mutuo multiplicentur, producta, quæ hinc fiunt, erunt in ratione composita ex illis rationibus datis.

105. Multiplicatis terminis antecedentibus A, B, D ra-

tionum $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ fiat productum ABD; multiplicatis vero earundem consequentibus fiat productum *abd*. Dico, productum ABD esse ad productum *abd* in ratione composita ex ipsis rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$

Demonstratio.

Ponatur $\frac{A}{a} = m$, $\frac{B}{b} = n$, $\frac{D}{d} = p$. Igitur erit $am = A$, $bn = B$, $dp = D$ (§. 72); & ideo $ambndp = ABD$. Constat autem, esse $\frac{ampndp}{abd} = mnp$ (§.17). Ergo erit etiam $\frac{ABD}{abd} = mnp$ (§. 69). Productum porro mnp est *exponens* rationis compositæ ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ (§. 53). Ergo ratio producti ABD ad productum *abd* est composita ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$.

COROLLARIUM I.

106. *Datis ergo quotcunque rationibus, sola multiplicatione antecedentium, & consequentium inter se mutuo respective, determinabitur ratio ex illis omnibus composita.*

COROLLARIUM II.

197. *Productum ex ductu primæ quatuor magnitudinum in tertiam est ad productum ex ductu secundæ in quartam in ratione composita ex ratione primæ ad secundam, & ex ratione tertiæ ad quartam. Productum vero ex ductu primæ in secundam est ad productum ex ductu tertiæ in quartam in ratione composita ex ratione primæ ad tertiam, & ex ratione secundæ ad quartam.* Antecedentes enim termini in primo casu sunt *prima*, & *tertia* illarum quatuor magnitudinum; in secundo vero sunt *prima*, & *secunda*

THEO-

THEOREMA XVI.

Si fuerint quotcunque magnitudines in eadem ſerie conſtitutæ, prima erit ad ultimam in ratione compoſita ex omnibus rationibus intermediis.

108. Eſto ſeries magnitudinum a, b, c, d, e. Dico, primam a eſſe ad ultimam e in ratione *compoſita* ex rationibus intermediis $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$.

Demonſtratio.

Ratio $\frac{abcd}{bcde}$ eſt compoſita ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$ (§. 105.). Eſt autem $\frac{a}{e} = \frac{abcd}{bcde}$ (§. 77). Ergo ratio quoque $\frac{a}{e}$ componitur ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$; adeoque &c.

COROLLARIUM.

109. *Prima quatuor magnitudinum continuo geometrice proportionalium eſt ad tertiam in ratione* duplicata; *ad quartam vero in ratione* triplicata *ſui ipſius ad ſecundam*. Videlicet, ſi fuerit $\div a . b . c . d$, ratio $\frac{a}{c}$ erit *duplicata*, & ratio $\frac{a}{d}$ erit *triplicata* rationis $\frac{a}{b}$. Etenim, ſtante hypotheſi, ratio $\frac{a}{c}$ componitur ex duabus rationibus æqualibus rationi $\frac{a}{b}$; ex tribus vero itidem ipſi $\frac{a}{b}$ æqualibus ratio $\frac{a}{d}$; adeoque &c. (§. 54.)

COROLLARIUM II.

110. Viciſſim vero *ratio primæ quatuor magnitudinum continuo proportionalium ad ſecundam eſt* ſubduplicata *rationis ipſius primæ ad tertiam;* ſubtriplicata *vero ejuſdem primæ ad quartam* (§. 57).

THEOREMA XV.

Si fuerint quatuor magnitudines continuo geometrice proportionales, quadratum primæ erit ad quadratum ſecundæ, ut prima ad tertiam; cubus vero primæ ad cubum ſecundæ, ut prima ad quartam.

I.

111. Eſto $\div a.b.c.d$. Dico 1., eſſe $aa.bb \sqsubset a.c$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $\div a.b.c$, erit $ac = bb$ (§. 74); adeoque $aac = bba$ (§. 68); & ideo $aa.bb \sqsubset a.c$ (§. 75).

II.

112. Dico 2., eſſe $aaa.bbb \sqsubset a.d$.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ſit $a.b \sqsubset c.d$, erit quoque $a.c = b.d$ (§. 92). Oſtenſum eſt autem, eſſe $aa.bb \sqsubset a.c$ (§. 111). Ergo erit etiam $aa.bb \sqsubset b.d$ (§. 25); adeoque $aad \sqsubset bbb$ (§. 73.); necnon $aaad = bbba$ (§. 68.); & ideo $aaa.bbb \sqsubset a.d$ (§. 75).

COROLLARIUM I.

113. Cum ratio primæ quatuor magnitudinum continuo geo-

geometrice proportionalium ad tertiam sit *duplicata:* ratio vero ejusdem primæ ad quartam sit *triplicata* ejusdem primæ ad secundam (§. 109), *magnitudines quadratæ sunt in ratione* duplicata; *magnitudines vero cubicæ sunt in ratione* triplicata *suarum radicum.*

COROLLARIUM III.

114. Vicissim vero *radices quadratæ sunt in ratione* subduplicata; *& radices cubicæ in ratione* subtriplicata *suarum potestatum* (§. 110).

SECTIO SECUNDA.

De linea recta.

CAPUT I.

De linea recta, quatenus alteri rectæ insistit, vel alteram secat.

DEFINITIO I.

115. *Punctum est, cujus pars nulla.* Videlicet id omne consideratur sub ratione *puncti*, quod ita spectatur atque sumitur, perinde ac si reipsa nullam partem, nullamque extensionem haberet.

DEFINITIO II.

116. *Linea est longitudo omnis prorsus latitudinis & profunditatis expers.* Nempe *linea* est talis magnitudo, quæ licet reipsa non solum sit longa, verum etiam lata & profunda, sola tamen longitudo in illa spectatur. Illius extrema, si sit finita, sunt puncta. Dividitur autem linea in *rectam, curvam,* & *mixtam.*

DEFINITIO III.

117. *Linea recta dicitur illa, quæ suis ex æquo interjicitur punctis*, sive, ut ait Plato, *recta linea ea est, cujus media extremis obumbrantur*, ut linea AB (*fig.* 1. *Tab.* I.). *Curva est illa, quæ inter sua extrema extollitur, vel deprimitur*, ut linea CD (*fig.* 2.) *Mixta vero, cujus una pars est linea recta, altera curva.*

DEFINITIO IV.

118. *Angulus planus est duarum linearum in uno puncto concurrentium mutua quædam inclinatio*. Sic inclinatio mutua duarum linearum AB, CB (*fig.* 3. *Tab.* I.) concurrentium in puncto B, *angulus* dicitur. Porro punctum B concursus dicitur *apex anguli*, isque indicatur media trium literarum, quibus angulus ipse exprimitur. Lineæ vero AB, CB *anguli crura* nuncupantur. Dividitur autem *angulus* in *rectilineum, curvilineum*, & *mixtilineum*. *Rectilineus* vocatur angulus, si lineæ ipsum constituentes sint rectæ. *Curvilineus*, si omnes sint curvæ. *Mixtilineus*, si altera sit recta, altera curva. *Angulus rectilineus*, de quo dumtaxat in præsens agimus, dividitur in *rectum, acutum*, & *obtusum*.

SCHOLION.

119. Animadvertere plurimum interest, *anguli magnitudinem* non ex linearum ipsum constituentium longitudine, sed ex illarum distractione a se mutuo repetendam esse, ita nimirum ut *ille angulus sit major, cujus crura magis sunt distracta, licet longitudine sint minora; illi vero sint æquales, cujus crura, licet magnitudine inæqualia sint, æque tamen distracta sunt a se mutuo.*

DEFINITIO IV.

120. *Angulus rectus vocatur ille, qui, alterutra rectarum ipsum*

ipsum constituentium directe per apicem producta, angulum habet ex altera parte sibi æqualem. Rectus nimirum erit angulus ABC (*fig.* 4. *Tab.* 1), si directe producta recta CB in D, angulus DBA hinc emergens, angulo ABC fuerit æqualis.

COROLLARIUM.

121. *Si ergo alterum crus anguli recti in directum per apicem producatur, alter rectus angulus efficitur.*

DEFINITIO VI.

122. *Angulus acutus est ille, qui a recto deficit. Obtusus vero, qui rectum excedit.* Sic *acutus* est angulus EBC; *obtusus* autem angulus DBC (*fig.* 5. *Tab.* I.), nam ille est minor hic vero major angulo recto ABC.

DEFINITIO VII.

123. *Recta linea dicitur alteri rectæ perpendicularis, quæ ita illi insistit, ut duos hinc inde angulos rectos efficiat.* Sic recta AB (*fig.* 4. *Tab.* 1.) erit *perpendicularis* rectæ DC, si recti fuerint anguli ABD, ABC.

DEFINITIO VIII.

124. Si una recta linea AB (*fig.* 6. *Tab.* I.) alteram secet DC in puncto E, atque adeo quatuor efficiat angulos in ipso puncto E, duo anguli AEC, DEB, sicuti etiam duo AED, CEB, dicuntur *ad verticem oppositi*

DEFINITIO IX.

125. *Duæ lineæ dicuntur habere segmentum commune, cum una pars utrique communis est, cetera vero diversa.* Sic duæ lineæ ABC, ABD (*fig.* 7. *Tab.* I.) dicuntur commune habere seg-

segmentum AB; quia pars AB est utrique communis. *Duæ vero rectæ vocantur in directum positæ, quia, veluti partes, unam eandemque rectam constituunt.*

AXIOMA

126. *Omnes anguli recti sunt inter se quales.* Omnes enim habent crura æque distracta.

THEOREMA I.

Recta super rectam consistens duos efficit angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales.

127. Rectæ AB (*fig.* 8. *Tab.* I.) altera insistat recta CD, duos cum illa efficiens angulos CDB, CDA. Dico, duos hujusmodi angulos vel esse rectos, vel duos æquare rectos, si simul sumantur.

Demonstratio.

Etenim vel recta CD est perpendicularis rectæ AB, vel non. Si est perpendicularis, patet propositum (§. 123). Si vero non est perpendicularis, erecta intelligatur ex puncto D perpendicularis DE. Itaque, cum duo anguli EDA, EDB sint recti (§. 123), tresque anguli CDA, CDE, EDB simul sumti adæquent duos EDA, EDB (§. 22), tres anguli CDA, CDE, EDB summam æquabunt duorum rectorum. Duo autem anguli CDE, EDB adæquant angulum CDB (§. 22), ut proinde duo anguli ADC, CDB æquales sint tribus ADC, CDE, EDB. Ergo duo quoque anguli ADC, CDB duobus rectis erunt æquales (§. 25). Recta igitur &c.

COROLLARIUM.

128. *Si plures rectæ lineæ eidem rectæ in eodem plano ad idem punctum insistant, omnes anguli, qui ab illis fiunt, sunt duobus rectis æquales.* Sunt enim duo recti in plures divisi.

Co-

COROLLARIUM II.

129. *Duæ rectæ lineæ sese mutuo secantes quatuor efficiunt angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales*. Quatuor nimirum anguli AEC, CEB, BED. DEA (*fig*. 6. *Tab*. I.) producti in eodem plano a duabus rectis AB, CD sese mutuo secantibus in puncto E, vel recti sunt, vel sunt quatuor rectis æquales. Etenim tam duo AEC, CEB, quam duo AED, DEB vel sunt recti, vel duos rectos adæquant.

COROLLARIUM III.

130. Hinc *omnes anguli, qui fiunt in eodem plano circa idem punctum, simul sumti, conficiunt summam quatuor rectorum*.

COROLLARIUM IV.

131. *Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune*. Si namque duæ lineæ ABC, ABD (*fig*. 7. *Tab*. I.) commune habentes segmentum AB, essent rectæ, erecta utcunque ex puncto B recta BE, cum duo anguli ABE, EBC æquales sint duobus ABE, ABD (§. 24), utpote quod tam illi, quam isti duos rectos propter hypothesim adæquent (§. 127) sublato communi ABE, reliquus EBC reliquo EBD esset æqualis (§. 27); atque adeo pars toti, quod repugnat (§. 23).

COROLLARIUM V.

132. *Si ad datam rectam linem ad datum in ea punctum duæ rectæ lineæ ex oppositis partibus ductæ, duos angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ*. In directum scilicet erunt duæ AB, FB (*fig*. 7. *T*. I.) ductæ ex oppositis partibus ad idem punctum B, si duo anguli ABE, EBF, quos efficiunt cum recta EB, fuerint recti, vel duobus rectis æquales. Etenim, si secus, in directum

ctum producta ad partem B recta AB, cadet vel supra rectam BF ad partem C, & sic efficiet cum recta EB duos angulos ABE, EBC minores duobus rectis, utpote minores duobus ABE, EBF; vel cadet infra rectam BF ad partem D, ac proinde duos producet angulos ABE, EBD majores duobus rectis, utpote majores duobus ABE, EBF. Utrumque autem repugnat (§. 127). Ergo &c.

THEOREMA II.

Ad datam rectam lineam e puncto in illa sumto una tantum recta perpendicularis in eodem plano ad eandem partem excitari potest.

133. Ex puncto D sumto in recta AB (*fig.* 8. *Tab.* I.) erecta intelligatur in eodem plano ad eandem partem recta DE ipsi AB perpendicularis. Dico, nullam aliam rectam ex eodem puncto D ad eandem partem in eodem plano excitari posse, quæ ipsi rectæ AB ad perpendiculum itidem incumbat.

Demonstratio.

Quippe, si fieri potest, esto alia perpendicularis DC. Igitur angulus CDA erit rectus (§. 123); isque propterea æquabit angulum ADE (§. 126); utpote qui eadem ratione rectus est. Angulus autem CDA est pars anguli ADE. Ergo pars æquabit totum. Hoc autem repugnat (§. 23). Ergo &c.

THEOREMA X.

Anguli ad verticem oppositi, qui a duabus rectis lineis sese mutuo secantibus producuntur, sunt æquales.

134. Duæ rectæ AB, CD (*fig.* 6. *Tab.* I.) sese mutuo secent in puncto E. Dico, angulos ad verticem oppositos AEC, DEB esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim tam duo DEA, AEC, quam duo DEA, DEB va-

valeant duos rectos (§. 127) duo DEA, AEC æquabunt duos DEA, DEB (§. 24). Igitur, sublato communi DEA, reliquus AEC erit reliquo DEB æqualis (§. 27). Eodem modo ostendentur æquales etiam duo DEA, CEB. Itaque &c.

COROLLARIUM I.

135. *Si unus quatuor angulorum, qui a duabus rectis sese mutuo secantibus producuntur, fuerit rectus, ceteri quoque omnes erunt recti.* Nimirum si rectus fuerit angulus AEC (*fig. 6. Tab.* I.) etiam reliqui AED, DEB, BEC erunt recti. Quippe, stante hypothesi, rectus erit angulus AED (§. 120). Igitur etiam duo DEB, CEB illis ad verticem *respective* oppositi, erunt recti.

COROLLARIUM II.

136. *Si recta perpendiculariter rectæ insistens infra illam directe producatur, etiam inferius segmentum erit eidem rectæ perpendiculare.* Videlicet directe producta recta perpendiculari AE in B, segmentum quoque EB erit eidem rectæ DC perpendiculare. Patet ex præcedenti.

COROLLARIUM III.

137. *Si quatuor rectæ lineæ ex eodem puncto in eodem plano ductæ, angulos ad verticem oppositos æquales fecerint, erunt duæ ex adverso in directum positæ.* Ut si quatuor rectæ EA, EB, ED, EC ex eodem puncto E in eodem plano erumpentes, fecerint angulos ad verticem oppositos AEC, DEB, sicuti etiam AED, CEB, inter se æquales, tam duæ rectæ AE, EB, quam duæ DE, EC erunt in directum positæ. Etenim, si secus, duæ rectæ lineæ sese mutuo secantes, haudquaquam efficerent angulos ad verticem oppositos inter se æquales.

CA-

CAPUT II.

De rectis lineis parallelis.

DEFINITIO I.

138. *Rectæ lineæ parallelæ dicuntur illæ, quæ ubique æqualiter inter se distant*. Hujusmodi sunt rectæ AB, CD (*fig*. 9. *Tab*. I.); cum eadem ubique sit illarum a se mutuo distantia.

COROLLARIUM I.

139. Hinc *perpendiculares omnes* ab, cd, ef *inter rectas parallelas AB, CD comprehensæ, sunt inter se æquales*.

COROLLARIUM II.

140. *Rectæ parallelæ, etsi in infinitum ad eandem partem producantur, nunquam possunt sibi mutuo in puncto occurrere*.

DEFINITIO II.

141. Contra vero *illæ duæ rectæ lineæ dicuntur non parallelæ inter se, quæ non ubique æqualiter inter se distant*. Sic duæ rectæ AB, CD (*fig*. 10. *Tab*. I.) non sunt parallelæ, quia eadem ubique non est illarum a se mutuo distantia.

DEFINITIO III.

142. Incidente recta EF in duas rectas parallelas AB, CD (*fig*. 11. *Tab*. I.) duo anguli BGH, GHD dicuntur *interni ad easdem partes*, sicuti etiam duo AGH, GHC. Duo BGH, GHC, quemadmodum & duo AGH, GHD, vocantur *alterni*. Angulus vero EGB dicitur *externus*; at vero *internus ad easdem partes* angulus GHD.

LEM-

LEMMA.

Si, recta EF (fig. 11. Tab. I.) incidente in duas rectas AB, CD, duo anguli interni BGH, GHD aequales fuerint duobus internis AGH, GHC, duae rectae AB, CD erunt parallelae.

143. Etenim, stante illa angulorum æqualitate, nulla est ratio, cur rectæ AB, CD accedere sibi mutuo debeant ad partes B, D potius quam ad partes A, C, si ad eas directe producantur. Ergo rectæ AB, CD æqualiter ubique distant a se mutuo; atque adeo sunt parallelæ (§. 138).

THEOREMA I.

Si, recta in duas rectas incidente, duo anguli interni ad easdem partes fuerint aequales duobus rectis, illae duae rectae lineae erunt inter se parallelae.

144. Recta EF (*fig.* 11. *Tab.* I.) incidat in rectas AB, CD, sintque duo anguli BGH, GHD interni ad easdem partes duobus rectis æquales. Dico, rectas AB, CD esse inter se parallelas.

Demonstratio.

Cum enim tam duo BGH, AGH, quam duo GHC, GHD valeant duos rectos (§. 127), quatuor anguli BGH, AGH, GHC, GHD erunt quatuor rectis æquales. Quamobrem, si duo BGH, GHD æquales fuerint duobus rectis, duobus quoque rectis æquales erunt duo AGH, GHC; ac proinde duo BGH, GHD æquabunt duos AGH, GHC (§. 24). Igitur duæ rectæ, AB, CD erunt parallelæ (§. 143); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

145. *Si recta incidens in duas rectas fuerit utrique perpendicularis, illae erunt parallelae.* Parallelæ nimirum erunt rectæ AB,

AB, CD (*fig.* 9. *Tab.* I.) si recta *ab* in illas incidens, fuerit utrique perpendicularis. Hoc enim ipso recti sunt duo anguli interni *Bab*, *Dba* (§. 123).

COROLLARIUM II.

149. *Si, recta in duas rect as incidente, angulus externus æqualis fuerit interno opposito, illæ erunt parallelæ.* Videlicet rectæ AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.) erunt parallelæ, si angulus EGB æqualis fuerit angulo GHD. Cum enim duo anguli EGB, BGH valeant duos rectos (§. 127) etiam duo GHD, BGH erunt hoc ipso duobus rectis æquales.

COROLLARIUM III.

147. *Si, recta in duas rectas incidente, anguli alterni æquales fuerint, illæ erunt parallelæ.* Sic parallelæ erunt rectæ AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.) si anguli alterni AGH, GHD fuerint æquales. Nam, hac stante hypothesi, cum duo anguli AGH, BGH æquales sint duobus rectis (§. 127), duo quoque BGH, GHD duos rectos æquabunt.

THEOREMA II.

Recta incidens in duas rectas parallelas, angulos internos ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

148. Parallelæ sint rectæ AB, CD (*fig.* 11. *Tab.* I.) in quas incidat recta EF. Dico, angulos internos ad easdem partes BGH, GHD æquales esse duobus rectis.

Demonstratio.

Cum enim duo anguli BGH, GHD æquales sint duobus AGH, GHC (§. 143.); & ipsi omnes simul sumti quatuor rectos adæquent, quod scilicet tam duo AGH, BGH, quam duo GHC, GHD sint duobus rectis æquales (§. 127),

rema-

remanet, duos internos BGH, GHD æquales esse duobus rectis: ac proinde &c.

COROLLARIUM I.

149. *Recta uni rectarum parallelarum perpendicularis, alteri quoque est perpendicularis.* Ut si uni CD rectarum parallelarum AB, CD (*fig.*9.*Tab.*I.) perpendicularis fuerit recta *ab*, alteri quoque AB ipsa recta *ab* erit perpendicularis. Quippe, cum duo anguli *Bab*, *Dba* valeant ex hypothesi duos rectos, & angulus *ab*D itidem ex hypothesi sit rectus (§. 123) rectus quoque erit angulus *Bab*.

COROLLARIUM II.

150. *Recta in duas rectas parallelas incidente, angulus externus internum ad easdem partes adæquat.* Angulus nimirum EGB (*fig.* 11.*Tab.*I.) æquabit angulum GHD, si rectæ AB, CD fuerint parallelæ. Cum enim tam duo EGB, BGH (§. 127) quam duo BGH, GHD (§. 148) valeant duos rectos, adeoque illi duo his duobus sint æquales (§. 24), sublato communi BGH, reliquus EGB reliquum GHD æquabit (§. 27).

COROLLARIUM III.

151. *Recta in duas rectas parallelas incidente, anguli alterni sunt æquales.* Sic anguli alterni AGH, GHD (*fig.* 11. *Tab.*I.) æquales sunt inter se. Nam, cum duo AGH, BGH æquales sint duobus BGH, GHD (§. 24), quod tam illi (§. 127) quam isti (§. 148) valeant duos rectos, sublato communi BGH, erit reliquus AGH reliquo GHD æqualis (§. 27).

THEOREMA III.

Quæ eidem rectæ sunt parallelæ, etiam inter se sunt parallelæ; & quæ uni rectarum parallelarum parallela est, alteri quoque earundem est parallela.

I.

152. Eidem rectæ CD (*fig.* 9. *Tab.* I.) parallelæ sint duæ AB, EF. Dico, duas AB, EF etiam inter se esse parallelas.

Demonstratio.

Etenim, stante hypothesi, tam perpendicula *ab*, *ef*, quam perpendicula *bm*, *fn* sunt æqualia inter se (§. 139). Ergo etiam perpendicula *am*, *en* erunt æqualia (§. 26) & ideo rectæ AB, EF erunt parallelæ (§. 138).

II.

153. Uni AB rectarum parallelarum AB, CD (*fig.* 9. *Tab.* I.) parallela sit recta EF. Dico, rectam EF etiam alteri CD esse parallelam.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim perpendicula *ab*, *ef* sint æqualia, sicuti etiam perpendicula *am*, *en* (§. 139), sublatis æqualibus *ab*, *ef*, etiam reliqua perpendicula *bm*, *fn* erunt æqualia (§. 27). Ergo rectæ quoque CD, EF sunt parallelæ (§. 138).

S E-

SECTIO TERTIA.

De figuris planis.

DEFINITIO I.

154. S*uperficies est magnitudo duplici tantum dimensione, longitudinis nempe, & latitudinis, prædita.* Videlicet magnitudo corporea spectatur sub ratione *superficiei*, si quatenus dumtaxat longa, & lata est, consideretur. Dividitur porro *superficies* in *planam*, *curvam*, & *mixtam*, ut de *linea* diximus; & sicuti extrema *lineæ* finitæ sunt *puncta*, ita extrema finitæ *superficiei* sunt *lineæ*.

DEFINITIO II.

155. *Figura* generatim sumta *est magnitudo pluribus dimensionibus prædita, undique terminata.* Dicitur: *pluribus dimensionibus prædita*; quia linea finita non est figura.

DEFINITIO III.

156. *Figura plana est plana superficies una vel pluribus lineis undique terminata.* Habita idcirco ratione linearum, quibus continetur, dividitur figura in *rectilineam*, *curvilineam*, & *mixtam*. Figura *rectilinea est illa, quæ rectis lineis; curvilinea, quæ una vel pluribus curvis lineis; mixta vero, quæ curva rectaque linea comprehenditur.*

DEFINITIO IV.

157. *Rectæ, quibus figura rectilinea terminatur, illius latera dicuntur. Omnes illæ simul sumtæ ipsius figuræ* perimeter, *sive* ambitus, *vocari solent. Area vero figuræ est totum illud spa-*

tium, quod figuræ perimetro comprehenditur. Sic *latera* figuræ ABC(*fig.* 12. *Tab.* I.) ejusque *perimeter*, sunt rectæ AB, BC, CA; *area* vero est spatium rectis AB, BC, CA contentum.

DEFINITIO V.

158. *Basis figuræ rectilineæ est illud latus, cui illa incumbit. Vertex figuræ est illud perimetri punctum, quod basi oppositum est, atque ab ipsa basi maxime distat. Altitudo vero est recta linea perpendicularis ducta a vertice in basim.* Ut si figura rectilinea BAC (*fig.* 12. *Tab.* 1.) incumbere intelligatur lateri BC, latus ipsum BC erit illius *basis*; *vertex* punctum A, & *altitudo* recta *Aa*: ubi notandum, altitudinem figuræ non semper cadere intra latera, sed quandoque uni eorum congruere, nec raro extra basim etiam cadere.

DEFINITIO VI.

159. *Illa figura rectilinea dicitur æquilatera, cujus omnia latera æqualia sunt inter se; illa vero æquiangula, cujus omnes anguli sunt æquales.* Ut si tria latera AB, BC, CA figuræ rectilineæ ABC (*fig.* 11. *Tab.* I.) æqualia fuerint inter se, figura ipsa erit *æquilatera*. Si autem æquales fuerint inter se tres ipsius anguli A, B, C, *æquiangula* nuncupabitur.

DEFINITIO VII.

160. *Duæ figuræ rectilineæ dicuntur inter se mutuo æquilateræ, cum latera unius æqualia sunt lateribus alterius, alterum alteri. Dicuntur vero æquiangulæ, cum anguli unius æquales sunt angulis alterius, alter alteri.* Nimirum *æquilateræ* inter se mutuo erunt duæ figuræ ABC, *abc* (*fig.* 12. *fig.* 13.) si fuerit AB = *ab*, BC = *bc*, CA = *ca*. Erunt vero inter se *æquiangulæ*, si angulus A æqualis fuerit angulo *a*, angulus B angulo *b*, & angulus C angulo *c*.

DE-

DEFINITIO VIII.

161. *Figura rectilinea regularis vocatur illa, quæ simul æquilatera est, & æquiangula.* Contra vero illa *irregularis nuncupatur, quæ vel latera habet inæqualia, vel inæquales angulos, vel nec angulos, nec latera habet æqualia.*

DEFINITIO IX.

162. *Duæ quantitates dicuntur sibi mutuo congruere, quando earum una alteri superposita, ipsarum termini coincidunt.*

COROLLARIUM I.

163. *Quæ sibi mutuo perfecte congruunt, sunt æqualia.* Hoc enim ipso sic se habent, ut neutrum illorum alterum excedat, neque ab illo excedatur.

COROLLARIUM II.

164. *Figuræ rectilineæ, quæ sibi mutuo perfecte congruunt, sunt inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ.* Latera quippe unius sunt hoc ipso æqualia lateribus alterius, alterum alteri, sicuti etiam ipsarum anguli.

COROLLARIUM III.

165. *Figuræ rectilineæ inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ sunt æquales.* Congruunt enim sibi mutuo, si earum una alteri superponatur.

CAPUT I.

De triangulis planis rectilineis.

DEFINITIO I.

166. *Triangulum planum est figura plana tribus tantum lineis terminata, totidemque angulos continens.* Si omnia ipsius latera sint lineæ rectæ, triangulum dicitur *rectilineum*; *curvilineum*, si omnes fuerint curvæ; *mixtilineum*, si altera linearum, quibus clauditur, fuerit recta, altera curva. Habita ratione laterum, dividitur triangulum planum rectilineum, de quo dumtaxat in præsens agimus, in *æquilaterum*, *isosceles*, & *scalenum*. Habita vero ratione angulorum, dividitur in *rectangulum*, *amblygonium*, & *oxygonium*.

DEFINITIO II.

167. *Triangulum æquilaterum est illud, cujus tria latera sunt inter se æqualia*, cujusmodi est triangulum ABC (*fig.* 12. *Tab* I.): cum sit $AB = BC = CA$. *Triangulum isosceles est illud, cujus duo latera sunt æqualia*, ut triangulum *abc* (*fig.* 13). *Scalenum vero, cujus omnia latera sunt inæqualia*, ut DEF (*fig.* 14).

COROLLARIUM.

168. Cum etiam triangulum *æquilaterum* spectari possit, veluti habens duo latera æqualia, *omne triangulum æquilaterum est isosceles*, licet non omne *isosceles* sit *æquilaterum*.

DEFINITIO III.

169. *Triangulum rectangulum dicitur illud, quod unum trium angulorum habet rectum*, ut triangulum DEF (*fig.* 14. *Tab.* I.) cujus angulus DEF est rectus. *Amblygonium, cujus unus angulo-*

gulorum est obtusus, ut triangulum ABC (*fig.* 15). *Oxygonium vero, cujus tres anguli sunt acuti*, ut triangulum *abc* (*fig.* 13).

DEFINITIO IV.

170. *Hypotenusa trianguli rectanguli dicitur illud latus, quod recto ipsius angulo opponitur*. Sic in triangulo rectangulo DEF (*fig.* 14. *Tab.* I.) latus DF oppositum angulo recto DEF *hypotenusa* nuncupatur.

AXIOMA.

171. *Recta linea est minor quavis curva, quæ eadem cum illa extrema habeat*. Sic recta CD (*fig.* 2. *Tab.* I.) est minor curva eadem habente extrema C, D.

THEOREMA I.

Tres anguli cujuslibet trianguli plani rectilinei simul sumti conficiunt summam duorum rectorum.

172. Esto triangulum planum rectilineum ABC (*fig.* 15. *Tab.* I.) Dico, tres ipsius angulos A, B, C summam æquare duorum rectorum, si simul sumantur.

Demonstratio.

Per verticem A ducta intelligatur recta EF parallela basi BC. Itaque, cum anguli alterni ABC, EAB æquales sint inter se, sicuti etiam anguli alterni ACB, FAC (§. 151), tres ABC, BAC, ACB æquales erunt tribus EAB, BAC, FAC (§. 26). Tres autem anguli EAB, BAC, FAC valent duos rectos (§. 128). Ergo tres quoque ABC, BAC, ACB simul sumti duos rectos æquabunt (§. 25); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

173. *Omnes trianguli plani rectilinei duo quicunque anguli minores sunt duobus rectis*; atque hinc

COROLLARIUM II.

174. *Una tantum recta perpendicularis a dato puncto ad datam rectam duci potest*. Si namque duæ rectæ *ab*, *ac* (*fig*. 13. *Tab*. I.) possent eidem rectæ *bc* ad perpendiculum incumbere, cum uterque angulus *abc*, *acb* sit rectus (§. 123), in triangulo *abc* duo anguli duos rectos æquarent.

COROLLARIUM III.

175. *Quilibet angulus trianguli regularis adæquat tertiam partem duorum rectorum, sive duos trientes unius recti*. Sunt enim omnes inter se æquales. Quamobrem *omnia triangula regularia sunt inter se mutuo æquiangula*.

COROLLARIUM IV.

176. *Si unus angulorum trianguli rectus est, vel obtusus, reliqui duo sunt acuti*.

COROLLARIUM V.

177. *Si unus trianguli angulus fuerit rectus, reliqui duo summam unius recti conficiunt*; & vicissim, *si duo anguli unius trianguli conficiunt summam unius recti, reliquus est rectus*.

COROLLARIUM VI.

178. *Tres anguli unius trianguli simul sumti æquales sunt tribus angulis alterius trianguli simul itidem sumtis* (§. 24). adeoque *si duo anguli unius trianguli æquales fuerint duobus angulis alterius trianguli, etiam reliquus erit reliquo æqualis* (§. 27).

COROLLARIUM VII.

179. *Omnis trianguli plani rectilinei uno latere directe producto, exter-*

externus angulus æqualis est duobus internis oppositis simul sumtis. Directe nimirum producto latere BC in D trianguli ABC (*fig.* 15. *Tab.* I.) angulus externus ACD adæquat duos simul sumtos CAB, ABC. Cum enim duo anguli ACB, ACD sint æquales duobus rectis (§. 127), adeoque tribus ABC, BCA, CAB (§. 25), sublato communi ACB, erit reliquus ACD reliquis duobus CAB, ABC æqualis (§. 27.

COROLLARIUM VIII.

180. Hinc *omnis trianguli plani rectilinei, uno latere directe producto, externus angulus major est interno opposito.* Angulus nimirum ACD major est tum angulo ABC, tum angulo CAB.

THEOREMA II.

Omnis trianguli plani rectilinei duo qualibet latera simul sumta reliquo sunt majora.

181. Esto triangulum planum rectilineum ABC (*fig.* 15). Dico, duo ipsius latera AB, BC simul sumta majora esse reliquo AC.

Demonstratio.

Cum enim duo latera AB, BC spectari possint veluti linea curva, eadem habens extrema cum recta, sive latere AC, patet, duo latera AB, BC simul sumta rectam excedere AC (§. 171).

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rect lineo ille angulus major est, qui majori lateri opponitur; & vicissim illud latus est majus, quod majorem angulum subtendit.

I.

182. Latus DF trianguli DEF (*fig.* 14. *Tab.* I.) sit majus latere EF. Dico, angulum quoque DEF majorem esse angulo EDF.

De-

Demonstratio.

Magis enim distracta sunt ob hypothesim duo latera DE, EF, quam duo DE, DF.

II.

183. Viciſſim vero angulus DEF ſit major angulo EDF. Dico, etiam latus DF majus eſſe latere EF.

Demonſtratio.

Cum enim ob exceſſum anguli DEF ſupra angulum EDF, magis diſtracta ſint latera DE, EF, quam latera DE, DF, latus DF majus neceſſario erit latere EF (§. 119).

COROLLARIUM I.

184. *Omnis trianguli, cujus inæqualia ſint latera, inequales ſunt anguli* & viciſſim *omnis trianguli, cujus inæquales ſint anguli, inæqualia ſunt latera.*

COROLLARIUM II.

185. *Perpendicularis minima eſt omnium rectarum, quæ ab eodem puncto in rectam lineam cadere poſſunt.* Sic perpendicularis A*a* (*fig.* 12. *T.* I.), minor eſt recta AB, & eadem ratione omnibus aliis, quæ a puncto A in rectam BC duci queunt. Cum enim angulus A*a*B in triangulo BA*a*, utpote rectus (§. 123), ſit major angulo AB*a*, qui eſt acutus (§. 176), recta AB major erit recta A*a* (§. 183).

SCHOLION.

186. Hinc apparet, cur penes perpendicularem dimen-

ſio

sio quæque sumatur. Hoc enim ipso, quod illa omnium rectarum, penes quas mensura sumi potest, sit minima, certa est atque determinata apud omnes, prout ad mensuram requiritur. Et hinc ratio etiam sumitur, cur tres tantum in quantitate continua permanenti sint dimensiones. Enimvero nonnisi tres rectæ lineæ sibi invicem perpendiculares per idem punctum deduci possunt.

THEOREMA IV.

Omnis trianguli, cujus duo latera sunt æqualia, æquales sunt duo anguli illis oppositi; & vicissim omnis trianguli, cujus duo æquales sunt anguli, æqualia sunt duo latera illis subtensa.

I.

187. Trianguli *bac* (*fig.* 13. *Tab.* I.) æqualia sint duo latera *ab*, *ac*. Dico, duos angulos *abc*, *acb* esse æquales.

Demonstratio.

Quippe, stante æqualitate laterum *ab*, *ac*, distractiones laterum *ab*, *bc*, & laterum *ac*, *cb* sunt æquales; adeoque &c. (§. 119.)

II.

188. Vicissim trianguli *abc* æquales sint anguli *abc*, *acb*: Dico, etiam latera *ab*, *ac* esse æqualia.

Demonstratio.

Cum enim ob æqualitatem angulorum *abc*, *acb*, distractio laterum *ab*, *bc* adæquet distractionem laterum *ac*, *cb*, duo latera *ab*, *ac* necessario erunt æqualia.

Co-

COROLLARIUM I.

189. *Omne triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum; & omne triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum*; atque hinc

COROLLARIUM II.

190. *Omne triangulum tam æquilaterum, quam æquiangulum est regulare* (§. 161).

THEOREMA V.

Si in triangulo plano rectilineo punctum aliquod sumatur, a quo duæ rectæ ad extrema basis ducantur; illæ minores erunt lateribus ipsius trianguli, sed majorem angulum continebunt.

191. Esto triangulum planum rectilineum ABC (*fig.* 16. *Tab.* I.) in quo punctum aliquot sumatur,

Primus Casus.

Et quidem primo in latere AB, sitque illud punctum *b*, a quo ad extremum C basis BC ducatur recta *b*C. Dico, duas *b*B, *b*C minores esse lateribus AB, AC, sed angulum B*b*C majorem esse angulo BAC.

Demonstratio.

Cum enim duo latera A*b*, AC majora sint reliquo *b*C (§. 181), summa A*b*+*b*B+AC major quoque erit summa *b*C+*b*B (§. 28). Rursus, cum angulus B*b*C spectari possit veluti externus trianguli *b*CA, liquido apparet, ipsum B*b*C majorem esse angulo BAC (§. 180).

Secundus Casus.

Modo sumatur punctum *a* in area trianguli, & ducantur re-

rectæ *aB*, *aC*. Dico, duas *aB*, *aC* minores esse duobus lateribus AB, AC, sed angulum B*a*C excedere angulum BAC

Demonstratio.

Directe producta C*a* in *b*, cum duo latera B*b*, *ba* trianguli B*ba* majora sint reliquo B*a* (§. 181), addito latere *a*C, erunt duo B*b*, *b*C majora duobus B*a*, *a*C (§. 28). Ostensum est autem, duo latera AB, AC excedere duo *b*B, *b*C. Ergo duo AB, AC duo quoque excedent *a*B, *a*C. Rursus angulus B*a*C major est angulo B*b*C, & angulus B*b*C angulo BAC (§. 180.). Ergo angulus B*a*C major itidem erit angulo BAC; adeoque &c.

THEOREMA VI.

Duo qualibet triangula inter se mutuo æquilatera sunt inter se æqualia.

192. Sint duo triangula ABC, *abc* (*fig.* 178. *Tab.* I.) inter se mutuo æquilatera, nempe latus AB sit æquale lateri *ab*, latus BC lateri *bc*, & latus AC lateri *ac*. Dico, illa duo triangula esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Hujusmodi enim sunt, ut, si unum alteri superponatur, sibi mutuo perfecte congruant. Hinc

COROLLARIUM I.

193. *Duo triangula inter se mutuo æquilatera, sunt etiam inter se mutuo æquiangula.* Non enim possunt illa sibi mutuo perfecte congruere, nisi sibi itidem mutuo perfecte congruant anguli, qui æqualibus *respective* lateribus continentur, ipsisque opponuntur; ac proinde nisi illi quoque sint inter se æquales (§. 163). Quamobrem

Co-

COROLLARIUM II.

194. *Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, habuerint autem etiam basim basi æqualem, angulum quoque habebunt angulo æqualem, qui æqualibus respective lateribus continentur.*

THEOREMA VII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, necnon angulum angulo æqualem, qui æqualibus respective lateribus continentur, & basim basi æqualem habebunt.

195. Latus AB trianguli BAC (*fig.* 17. *Tab.* I.) sit æquale lateri *ab* trianguli *bac* (*fig.* 18), & latus AC lateri *ac*, necnon angulus BAC angulo *bac*. Dico, basim quoque BC basi *bc* esse æqualem.

Demonstratio.

Etenim stante hypothesi, duo hujusmodi triangula sic se habent, ut, uno alteri superposito, sibi mutuo congruant tum penes angulos BAC, *bac*, tum penes latera AB, *ab*, & AC, *ac*. Ergo sibi mutuo congruent etiam eorum bases BC, *bc*; atque adeo istæ erunt inter se æquales (§. 163).

COROLLARIUM.

196. *Duo itaque hujusmodi triangula sunt inter se mutuo æquilatera; adeoque etiam inter se mutuo æquiangula* (§. 193), *necnon plane inter se æqualia* (§. 165).

THEO-

THEOREMA VIII.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, eamque bifariam dividens, ipsum quoque angulum dividit bifariam, estque basi perpendicularis.

In triangulo isoscele BAC (*fig.* 12. *Tab.* I.) ab angulo verticali BAC ad basim BC ducatur recta A*a*, quæ basim ipsam BC bifariam dividat.

I.

197. Dico primo, rectam A*a* dividere bifariam etiam angulum BAC.

Demonstratio.

Duo triangula BA*a*, CA*a* habent ex hypothesi duo latera AB, AC æqualia (§. 167), latus A*a* est utrique commune, & basis B*a* basim C*a* adæquat. Ergo etiam angulus BA*a* æqualis est angulo CA*a* (§. 194); adeoque &c.

II.

198. Dico 2., rectam A*a* ad perpendiculum basi BC incumbere.

Demonstratio.

Cum enim ex hypothesi latus B*a* adæquet latus *a*C, & latus A*a* sit commune utrique triangulo A*a*B, A*a*C, basis quoque AB sit æqualis basi AC (§. 167), angulus A*a*B æqualis erit angulo A*a*C (§. 194). Duo autem hujusmodi anguli valent duos rectos (§. 127). Ergo uterque est rectus; adeoque recta A*a* ad perpendiculum basi BC incumbit (§. 123).

THEO-

THEOREMA IX.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quæ æqualibus angulis adjacent, vel quæ uni æqualium angulorum subtenduntur, & reliqua latera reliquis lateribus, alterum alteri, æqualia habebunt.

I.

199. Angulus ABC trianguli BAC (*fig.* 17. *Tab.* I.) sit æqualis angulo *abc* trianguli *bac* (*fig.* 18), & angulus ACB angulo *acb*. Æqualia quoque sint latera BC, *bc*, quæ æqualibus illis angulis adjacent. Dico, etiam latus AB esse æquale lateri *ab*, & latus AC lateri *ac*.

Demonstratio.

Cum enim stante hypothesi, nequeat triangulum BAC superponi triangulo *bac*, quin congruant sibi mutuo tum latera BC, *bc*, tum anguli ABC, *abc*, & ACB, *acb*, sibi mutuo quoque congruent tam latera AB, *ab*, quam latera AC, *ac*. Ergo tam illa, quam ista erunt inter se æqualia (§. 163).

I I.

200. Æqualia modo sint latera AB, *ab*, quæ æqualibus angulis BCA, *bca* subtenduntur. Dico, æqualia esse inter se tum latera BC, *bc*, tum latera CA, *ca*.

Demonstratio.

Cum enim tres anguli trianguli ABC æquales sint tribus angulis trianguli *abc* (§. 178.) demtis æqualibus ABC, *abc* & ACB, *acb*, erit reliquus BAC reliquo *bac* æqualis (§. 27). Itaque latera AB, *ab* æqualibus angulis adjacent. Ergo latus

tus BC adæquat latus *bc*, & latus AC latus *ac* (§. 199); ac proinde &c.

COROLLARIUM.

201. *Duo igitur hujusmodi triangula, utpote inter se mutuo æquilatera, sunt etiam inter se mutuo æquiangula* (§. 193), *& inter se æqualia* (§. 165).

THEOREMA X.

Si duo latera unius trianguli æqualia fuerint duobus lateribus alterius trianguli, alterum alteri; angulus vero unius major angulo alterius, qui æqualibus respective lateribus continentur, erit & basis major base; & viciſſim, si, posita respectiva æqualitate laterum, fuerit basis major base, etiam angulus verticalis unius major erit angulo verticali alterius.

I.

202. Æqualia sint latera *ab*, AB, necnon *ac*, AC triangulorum *bac*, BAC, (*fig.* 18. 19. *Tab.* I.) angulus vero BAC major sit angulo *bac*. Dico, etiam basim BC majorem esse base *bc*.

Demonstratio.

Etenim, stante illa *respectiva* æqualitate laterum, & inæqualitate angulorum verticalium, magis distracta erunt latera AB, AC, quam latera *ab*, *ac*. Ergo major quoque erit basis BC, quam basis *bc*.

II.

203. Viciſſim vero, posita eadem *respectiva* æqualitate laterum, basis BC excedat basim *bc*. Dico, angulum quoque BAC majorem esse angulo *bac*.

Demonstratio.

Siquidem ob hypothesim distracta magis sunt latera BA, CA, quam latera *ba*, *ta*; adeoque &c.

CAPUT II.

De quadrilateris, parallelogrammis, & polygonis.

DEFINITIO I.

204. *Quadrilaterum planum rectilineum est figura plana quatuor rectis lineis terminata, totidemque angulos continens.* Dividitur autem *quadrilaterum* in *quadratum, altera parte longius, rombum, romboidem, & trapezium.*

DEFINITIO II.

205. *Quadratam est quadrilaterum, cujus omnia latera æqualia sunt inter se, sicuti etiam omnes ipsius anguli.* Ut quadrilaterum ABCD (*fig.* 21. *Tab.* I.)

COROLLARIUM.

206. *Quadratum igitur est figura regularis* (§. 161).

DEFINITIO III.

207. *Altera parte longius est quadrilaterum, cujus omnes anguli æquales sunt inter se, ex lateribus vero, nonnisi quæ sibi mutuo opponuntur, sunt æqualia.* Tale est quadrilaterum ABCD (*fig.* 22. *Tab.* I.)

DEFINITIO IV.

208. *Rombus est quadrilaterum, cujus omnia latera sunt æqualia,*

lia; *minime vero anguli*. *Romboides vero est quadrilaterum*; *cujus opposita tantum latera sunt æqualia*, *sed anguli sunt inæquales*, *qui ad eandem sunt partem*. Sic quadrilaterum ABCD (*fig.* 24. *Tab.* I.) est *rombus*; *romboides* vero quadrilaterum *abcd* (*fig.* 24).

DEFINITIO V.

209. *Trapezium vero illud omne quadrilaterum nuncupatur*, *cujus duo opposita latera sunt inæqualia*.

DEFINITIO VI.

210. *Parallelogrammum est quadrilaterum*, *cujus duo quavis latera ex adverso posita sunt parallela*. Sic quadrilaterum ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) erit parallelogrammum, si tam duo latera AB, CD, quam duo AC, BD, fuerint parallela. Quod si illius anguli fuerint recti, *rectangulum* dicitur, ut ABCD (*fig.* 22).

DEFINITIO VII.

211. *Diameter*, sive *diagonalis parallelogrammi est recta ducta ad oppositos parallelogrammi angulos*. Si recta AD est *diameter*, sive *diagonalis* parallelogrammi ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.)

DEFINITIO III.

212. *Polygonum est figura plana pluribus*, *quam quatuor rectis lineis terminata*. Hinc innumeræ prorsus sunt *polygoni* species, cum illius latera in infinitum multiplicari queant. Quod igitur quinque constat lateribus, *pentagonum*; *hexagonum*, quod sex; *heptagonum*, quod septem lateribus, atque ita de ceteris, comprehenditur.

AXIOMA.

213. *Quadrata æqualia habent latera æqualia*; *& vicissim quadrata rectarum æqualium sunt æqualia*.

THEOREMA I.

Quatuor anguli cujuslibet quadrilateri simul sumti conficiunt summam quatuor rectorum.

214. Nimirum quatuor anguli quadrilateri ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) summam quatuor rectorum conficiunt.

Demonstratio.

Nam ducta ad oppositos angulos recta AD, quatuor anguli quadrilateri ACDB adæquant sex angulos triangulorum DAB, ADC (§. 22). Sex autem anguli triangulorum DAB, ADC simul sumti valent quatuor rectos (§. 172.) Ergo totidem quoque rectos quatuor anguli quadrilateri ACDB æquabunt (§. 25).

COROLLARIUM.

215. *Omnes anguli quadrati, sicuti etiam quadrilateri, quod est altera parte longius, sunt recti.* Sunt enim omnes inter se æquales (§. 205. 207); cumque omnes anguli recti sint inter se æquales (§. 126), *omnia quadrata, sicuti etiam omnia quadrilatera altera parte longiora, sunt respective inter se mutuo æquiangula* (§. 160).

THEOREMA II.

Omne quadrilaterum, cujus duo opposita latera sunt æqualia, & parallela, est parallelogrammum.

216. Duo latera AB, CD quadrilateri ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) sint æqualia inter se, & parallela. Dico, quadrilaterum ACDB esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Ducta ad oppositos angulos A, D recta AD, cum rectæ AB,

AB, CD sint parallelæ, anguli alterni DAB, ADC erunt æquales (§. 151). Duo autem latera AB, CD posita sunt æqualia, & latus AD est commune utrique triangulo DAB, ADC. Ergo bases BD, AC erunt æquales (§. 195); duoque ipsa triangula erunt inter se mutuo æquilatera; ac proinde inter se mutuo æquiangula, nimirum anguli ADB, DAC erunt æquales (§. 193). Sunt autem alterni. Ergo rectæ AC, BD sunt parallelæ (§. 147); & ideo quadrilaterum ACDB est parallelogrammum (§. 210).

COROLLARIUM.

217. *Rectæ, quæ ad eandem partem conjungunt duas rectas æquales, & parallelas, sunt inter se æquales, & parallelæ.* Demonstravimus enim, rectas AC, BD, quæ ad easdem partes simul jungunt rectas æquales, & parallelas AB, CD, esse inter se æquales, & parallelas.

THEOREMA III.

Omne quadrilaterum habens opposita latera æqualia, vel oppositos angulos æquales, est parallelogrammum.

I.

218. Tam duo latera AB, CD, quam duo AC, BD quadrilateri ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) sint æqualia. Dico, quadrilaterum ACDB esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Ducta ad oppositos angulos recta AD, duo triangula DAB, ADC sunt propter hypothesim inter se mutuo æquilatera. Ergo & equiangula (§. 193.), æquales nimirum sunt tum anguli DAB, ADC, tum anguli ADB, DAC. Ergo, cum sint alterni, tam rectæ AB, CD, quam rectæ BD, AC sunt parallelæ (§. 147); adeoque &c.

 219. Sint

II.

219. Sint modo duo anguli ACD, ABD æquales inter se, sicuti etiam duo BAC, CDB. Dico, quadrilaterum ACDB esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Cum enim, stante hypothesi, duo BAC, ACD æquales sint duobus ABD, BDC; duo DBA, BAC duobus ACD, CDB; & omnes illi quatuor anguli valeant quatuor rectos (§. 214), tam duo BAC, ACD, quam duo DBA, BAC, erunt duobus rectis æquales. Ergo parallelæ erunt inter se tam rectæ AB, CD, quam rectæ AC, BD (§. 144); ac proinde quadrilaterum ACDB erit parallelogrammum (§. 210).

COROLLARIUM.

220. *Quadratum, altera parte longius, rombus, & romboides sunt parallelogramma.* Habent enim opposita latera æqualia (§§. 205. 227. 208).

THEOREMA IV.

Omnis parallelogrammi, qui ex adverso sunt, anguli & latera sunt inter se æqualia.

I.

221. Esto parallelogrammum ACDB (*fig.* 20. *Tab.* I.) Dico 1, oppositos ipsius angulo ABD, ACD esse æquales.

Demonstratio.

Cum enim ob parallelismum rectarum AC, BD duo anguli

guli DBA, BAC valent duos rectos (§. 148), ficuti haud diffimili ratione etiam duo BAC, ACD, quod fcilicet etiam rectæ AB, CD fint parallelæ (§. 210), duo anguli DBA, BAC æquabunt duos BAC, ACD (§. 24). Sublato ergo communi BAC, erit reliquus DBA reliquo ACD æqualis (§. 27). Eodem modo oftendentur æquales etiam duo BAC, CDB.

II.

222. Dico 2, oppofita latera AB, CD, ficuti etiam AC, BD, effe æqualia.

Demonftratio.

Etenim, ducta diagonali AD, cum anguli alterni BAD, ADC, ADB, DAC fint æquales (§. 51) ipfifque adiaceat latus AD, quod eft commune utrique triangulo DBA, ACD, erit AB=CD, AC=BD (§. 199).

COROLLARIUM I.

223. *Si unus angulorum parallelogrammi rectus fuerit, etiam reliqui ipfius anguli erunt recti.* Non enim poteft unus ABC (*fig.* 22. *Tab.* I.) effe rectus, quin rectus fit etiam oppofitus ADC; cumque tunc reliqui duo BAD, BCD valeant duos rectos (§. 214) & fint æquales, ipfi quoque erunt recti.

COROLLARIUM II.

224. *Segmenta rectarum parallelarum inter parallelas contenta funt æqualia.* Nimirum æqualia inter fe erunt fegmenta *ab*, *ef* rectarum parallelarum *am*, *en* (*fig.* 9. *Tab.* I.) contenta inter parallelas AB, CD. Quadrilaterum quippe *abfe* eft parallelogrammum (§. 210).

COROLLARIUM III.

225. *Omnes rectæ in parallelogrammo basi parallelæ, sunt inter se æquales*. Ut si in parallelogrammo ABCD (*fig.*22.*T.*I.) ductæ intelligantur rectæ *ab*, *cd*, & aliæ quotcunque basi BC parallelæ, istæ erunt omnes inter se æquales. Cum enim ob hypothesim quadrilatera *a*BC*b*, *c*BC*d* sint parallelogramma, æqualia erunt opposita latera *ab*, BC, *cd*, BC; adeoque &c.

THEOREMA V.

Diagonales parallelogrammi sese mutuo bifariam dividunt, & omnis diagonalis dividit parallelogrammum in duo æqualia triangula.

I.

226. In parallelogrammo ABCD (*fig.* 23. *Tab.* I.) ductæ sint diagonales AC, BD. Dico, eas sese mutuo bifariam dividere.

Demonstratio.

Æquales sunt anguli alterni BDC, DBA, ACD, CAB (§. 51.). Æqualia sunt autem etiam latera AB, CD triangulorum A*a*B, D*a*C, quæ illis adiacent (§. 222). Ergo erit quoque B*a*=*a*D, A*a*=*a*C (§. 199).

II.

227. In parallelogrammo ACDB (*fig.* 20. *T.* I.) esto diagonalis AD. Dico, triangula DAB, ADC esse æqualia; adeoque parallelogrammum ACDB duplum esse utriusque trianguli DAB, ADC.

Demonstratio.

Cum enim sit AB=CD, AC=BD (§. 222) & latus AD sit com-

commune utrique triangulo DAB, ADC, hujusmodi triangula sunt inter se mutuo æquilatera, ac proinde inter se æqualia (§. 192).

COROLLARIUM.

228. Opposita triangula AaD BaC AaB, DaC, *fig.* 23. *Tab.* I.) in quæ parallelogrammum ABCD dividitur a diagonalibus AC, BD sunt æqualia. Quippe, cum triangulum ACD sit æquale triangulo DBA (§. 227.) sublato communi AaD, erit reliquum AaB reliquo DaC æquale (§. 27). Eodem modo triangulum AaD trianguloBaCæquale demonstrabitur.

THEOREMA VI.

Parallelogramma super eandem basim, & in iisdem rectis parallelis constituta, sunt æqualia.

229. Super eandem basim BC. & in iisdem rectis parallelis AF, BC(*fig.* 25. *Tab.* I.) constituta habeantur duo parallelogramma ABCD,EBCF. Dico, ea esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Cum enim sit AD=BC, & EF=BC (§. 222.), erit quoque AD=EF (§. 24); adeoque AE=DF (§. 26.) Est autem etiam AB=DC, & BE=CF (§. 222.) Ergo duo triangula AEB, DFC, utpote inter se mutuo æquilatera, sunt inter se æqualia (§. 192.). Sublato propterea communi triangulo DaE, erit trapezium ABaD trapezio EaCF æquale (§. 27); utrisque vero addito triangulo BaC, erit totum ABCD æquale toti EBCF (§. 26.); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

230. *Triangula super eandem basim, & in iisdem rectis parallelis constituta sunt æqualia.* Videlicet æqualia erunt triangula BAC,

BAC, BFC super eandem basim BC, & in iisdem rectis parallelis AF, BC constituta. Sunt enim pars dimidia parallelogrammorum æqualium ABCD, EBCF (§. 227).

COROLLARIUM II.

231. *Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint basim, & fuerint in iisdem rectis parallelis constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.* Sic parallelogrammum ABCD est duplum trianguli BFC. Cum enim parallelogrammum ABCD sit duplum trianguli BAC (§. 227), & triangulum BFC sit æquale triangulo BAC (§. 230), parallelogrammum ABCD duplum quoque erit trianguli BFC (§. 70).

THEOREMA VII.

Quadratum hypotenusæ trianguli rectanguli est æquale quadratis laterum simul sumtis.

232. Super latera trianguli rectanguli ABC (*fig. 26. T. I.*) descripta intelligantur quadrata AN, BD, BE. Dico, quadratum AN hypotenusæ AC æquare quadrata BD, BE laterum AB, BC simul sumta.

Demonstratio.

Jungantur puncta D, C recta DC, & puncta B, F recta BF, ductaque intelligatur a vertice B recta BM parallela lateri AF. Itaque, cum anguli DAB, CAF, utpote recti, sint æquales (§. 116), addito utrisque angulo BAC, totus DAC toti BAF erit æqualis (§. 26). Æqualia sunt autem etiam latera DA, AB, sicuti etiam AC, AF (§. 205). Ergo triangulum DCA erit æquale triangulo ABF (§. 196). Quadratum autem BD, & triangulum DCA habent eandem basim DA, & sunt in iisdem rectis perallelis PC, DA constituta; cum recta BC, & recta PB ob rectitudinem angulorum ABP, ABC sint in directum positæ (§. 132), rectaque PB sit parallela rectæ DA (§. 220).

(§. 220). Ergo quadratum BD est duplum trianguli DCA (§. 231). Eadem porro ratione parallelogrammum AFM*a* est duplum trianguli ABF. Ergo quadratum DB, & parallelogrammum AFM*a* sunt æqualia (§. 70.). Haud dissimili modo ostendam, parallelogrammum *a*MNC æquare quadratum BE. Igitur duo parallelogramma AM, *a*N, sive quadratum AN adæquat duo quadrata BD, BE simul sumta; ac proinde &c.

COROLLARIUM.

233. *Quadratum diagonalis quadrati est duplum quadrati lateris ejusdem*. Videlicet quadratum diagonalis BD quadrati ABCD (*fig.* 21. *Tab.* I.) est duplum quadrati lateris BA. Quadratum quippe diagonalis BD est æquale quadratis laterum BA, AD ob rectitudinem anguli BAD; ipsa vero quadrata sunt inter se æqualia (§. 213).

SCHOLION.

234. Ex hoc *corollario* ostenditur, dari lineas *incommensurabiles*, hoc est hujusmodi, ut nulla sit pars quantumvis exigua, quæ eas omnes adæquate metiatur. Observandum est igitur, unam partem *aliquotam* lineæ se habere ad totam ipsam lineam, quemadmodum *unitas* ad numerum integrum, videlicet unam partem *vigesimam* lineæ esse ad lineam integram, ut 1 ad 20; atque hinc quadratum quoque lineæ cujuscunque esse ad ipsam lineam, ut est numerus quadratus ad suam radicem; & ideo quadratum cujuslibet lineæ numeris exprimi posse, nempe quadratum lineæ, quæ spectetur divisa in 6. partes æquales, posse exprimi numero quadrato 36, sicuti ipsa linea numero 6 designatur. Nequeunt ergo duæ lineæ habere partem *aliquotam* communem, quin duobus integris numeris ex eadem unitate aliquoties sumta resultantibus exprimi illæ queant; ac proinde quin etiam illarum quadrata duobus numeris quadratis designentur, ita nimirum ut, si, posita divisione lineæ A in *sex* partes æquales,

qua-

quatuor ex his partibus adæquate conftituant lineam B, quadratum lineæ A optime exprimatur numero quadrato 36, & quadratum lineæ B numero quadrato 16; fitque propterea quadratum lineæ A ad quadratum lineæ B, ut 36. ad 16, ficuti linea A eft ad lineam B, ut 6. ad 4. His pofitis, evidens eft ex hoc *corollario*, diagonalem DB quadrati ABCD (*fig.* 21. *Tab.* I.) effe *incommenfurabilem* lateri AB ipfius quadrati. Hujufmodi enim rectæ nequeunt effe *commenfurabiles*, feu duobus integris numeris defignari, quin duobus numeris quadratis earum itidem quadrata exprimantur. Hoc autem aperte falfum eft; cum certa res fit, duobus numeros quadratos inveniri neutiquam poffe, quorum unus fit duplus alterius, quemadmodum quadratum diagonalis BD eft in ratione *dupla* ad quadratum lateris AB. Ergo duæ rectæ BD, AB nullam habent communem menfuram, feu funt inter fe *incommenfurabiles*; atque adeo ex *indivifibilibus* haudquaquam coalefcunt. Nam, cum ejufmodi indivifibilia, fi admittantur, fint æqualia inter fe, illorum quodlibet utramque rectam BD, AB adæquate metiretur, quod repugnat. Omnis itaque linea ex partibus in infinitum divifibilibus componatur neceffe eft.

THEOREMA VIII.

Anguli interni cujuslibet polygoni fimul fumti conficiunt fummam tot rectorum, quot funt ipfius latera bis fumta, demtis quatuor.

235. Videlicet, cum numerus laterum hexagoni ACE (*fig.* 27. *Tab.* I.) bis fumtus, fit 12, fique huic numero quatuor unitates demantur, relinquatur 8, omnes anguli ipfius hexagoni fimul fumti æquabunt 8 angulos rectos.

Demonftratio.

Sumto in area hexagoni puncto *a*, ducantur ad fingulos ipfius angulos rectæ *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, *a*F. Divifum itaque illud erit in tot triangula, quot funt ipfius latera;

cum-

cumque tres anguli cujuslibet trianguli adæquent duos rectos (§. 172), omnes anguli hexagoni ACE una cum iis, qui sunt circa punctum *a*, erunt æquales 12. angulis rectis. Anguli autem, qui sunt circa punctum *a* valent quatuor rectos (§. 130.). Ergo anguli hexagoni ACE simul sumti *octo rectos* æquabunt: Eodem modo ratiocinare de aliis. Itaque &c.

COROLLARIUM I.

236. Cum in quolibet polygono tot sint anguli, quot latera, omnesque anguli polygoni regularis sint inter se æquales (§. 161), diviso numero angulorum rectorum, quos adæquant anguli polygoni regularis, per numerum laterum eiusdem, *quotus* erit valor cujuslibet anguli ipsius polygoni dati. Sic quilibet angulus hexagoni regularis adæquat $\frac{8}{6}$ sive $\frac{4}{3}$ unius recti, nempe *unum rectum, & unam tertiam* illius partem. Hinc

COROLLARIUM II.

237. Ex omnibus figuris rectilineis regularibus sola triangula, quadrata, & hexagona, si penes latera *respective* simul uniantur, replent spatium, quod est circa idem punctum in eodem plano. Videlicet *sex triangula, & quatuor quadrata, & tria hexagona regularia* simul penes latera unita spatium complent exacte, quod est circa datum punctum in plano, & præter has figuras nulla est alia, cui id competat. *Sex* enim anguli *trianguli regularis* (§. 175.) *quatuor* anguli *quadrati* (§. 215), sicuti etiam *tres* anguli *hexagoni regularis* (§. 236) simul sumti, æquales sunt quatuor rectis.

COROLLARIUM III.

238. *Omnes figuræ rectilineæ regularis ejusdem generis sunt inter se mutuo æquiangulæ.*

CA-

CAPUT III.

De circulo.

DEFINITIO I.

239. *Circulus est figura plana una tantum curva linea comprehensa, in cujus area punctum est, a quo omnes rectæ ductæ in illam curvam sunt æquales.* Hujusmodi est figura ABD (*fig.* 28. *Tab.* I.). Curva quippe continetur linea AEDB; omnesque rectæ *a*A, *a*E, *a*D &c. ductæ a puncto *a* in illam curvam, sunt inter se æquales.

DEFINITIO II.

240. *Peripheria, sive circumferentia circuli est curva linea, qua ille clauditur. Centrum est punctum sumtum in illius area, a quo omnes rectæ ductæ in peripheriam sunt æquales. Radius*, qui etiam *semidiameter* dicitur, *est qualibet recta ducta a centro in peripheriam. Diameter vero est quævis recta ducta per centrum, & utrinque ad peripheriam terminata.* Sic curva ADB(*fig.* 27. *Tab.* I.) est *peripheria* circuli AEB. *Centrum* est punctum *a*. *Radius*, sive *semediameter* recta quævis *a*A, *a*B &c. *Diameter* vero recta AC.

COROLLARIUM.

241. *Omnes radii circuli, sicuti etiam omnes ipsius diametri, sunt respective inter se æquales.* Cumque centrum circuli sit punctum in illius medio positum, *quævis diameter bifariam circulum dividit.* Unde portio circuli diametro & semiperipheria terminata, *semicirculus*; portio vero quarta peripheriæ parte, & duobus radiis angulum rectum in centro constituentibus comprehensa, ut A*a*B (*fig.* 28. *Tab.* I.) *quadrans* circuli nuncupatur.

DE-

DEFINITIO III.

242. *Chorda circuli est quævis recta ducta intra circulum, & utrinque ad illius peripheriam terminata*, ut recta *bd*. *Portiones vero circuli, quæ chorda definiuntur*, ut *bd*B, *b*E*d* (*fig.* 28. *T.* I.) *circuli segmenta vocari solent*.

DEFINITIO IV.

243. *Sector circuli est illius portio sub duobus radiis, & arcu, quem illi intercipiunt, comprehensa*. Hujusmodi sunt portiones A*a*E, E*a*D circuli ADB (*fig.* 28. *Tab.* I.)

DEFINITIO V.

244. *Angulus ad centrum, sive in centro circuli, dicitur ille, qui a duobus ipsius circuli radiis in ipso centro efficitur*, ut angulus E*a*D. *Angulus vero ad peripheriam vocatur ille, cujus apex in peripheria est, ejusque crura in peripheriam desinunt*, ut angulus EBD (*fig.* 29. *Tab.* I.) in circulo EBD. Uterque porro istorum arcui ED insistere dicitur.

SCHOLION

245. *Mensura anguli positi in centro circuli est arcus peripheriæ ipsius circuli, inter anguli crura comprehensus*. Sic arcus ED (*fig.* 29. *Tab.* I.) metitur angulum E*a*D positum in centro *a* circuli BED. Universaliter autem *mensura anguli rectilinei est arcus circuli, arbitrario circini intervallo ex illius apice descripti, contentus inter crura ipsius anguli*. Ut si ex apice *a* anguli E*a*D describatur circulus BED, arcus ED, qui continetur inter crura *a*E, *a*D ipsius anguli, ejusdem mensura nuncupatur. Quoniam porro peripheria cujusvis circuli dividitur a Mathematicis in 360. partes æquales, quas *gradus* vocant, & quilibet *gradus* in 60. partes itidem æqua-

quales, quæ dicuntur *minuta*, atque ita deinceps, *tot graduum & minutorum dicitur datus quivis angulus, quot gradus & minuta in illo numerantur arcu, qui angulum ipsum metitur*. Ut si in arcu ED sint *gradus* 23, & *minuta* 40, angulus EaD erit *grad.* 23. *min.* 40. Ex his manifeste sequitur,

COROLLARIUM I.

246. *Angulos positos in centro ejusdem circuli esse directe inter se, ut arcus, quos eorum crura comprehendunt; & vicissim arcus esse, ut ipsi anguli*. Sic angulus AaE (*fig.* 28. *Tab.* I.) est ad angulum EaD, ut arcus AE ad arcum ED, & vicissim arcus AE ad arcum ED, ut angulus AaE ad angulum EaD.

COROLLARIUM II.

247. Quoniam vero tota peripheria circuli est mensura quatuor angulorum rectorum, qui circa illius centrum esse possunt (§. 130.) perspicuum efficitur, *ut angulus in centro circuli ad quatuor rectos, ita esse arcum illi subtensum ad totam peripheriam*; & vicissim, *ut est arcus circuli ad totam peripheriam, ita esse angulum in centro circuli, qui illi arcui insistit, ad quatuor rectos*. Nimirum ut angulus EaD (*fig.* 28. *Tab.* I.) ad quatuor rectos, ita esse arcum ED ad totam peripheriam circuli BED, & vicissim, ut arcus ED ad totam peripheriam BED, ita esse angulum EaD, ad quatuor rectos, qui circa centrum *a* in plano circuli constitui possunt.

DEFINITIO VI.

248. *Angulus in circuli portione consistens vocatur ille, qui efficitur a duabus rectis lineis ductis a puncto sumto in arcu ipsius portionis ad ejusdem extrema*. Sic angulus EBD (*fig.* 29. *Tab.* I.) sicuti etiam angulus EAD, dicitur consistere in portione EBAD circuli EDB.

DE-

DEFINITIO VII.

249. *Angulus segmenti est ille, qui a recta circulum tangente, & chorda per punctum contactus ducta efficitur.* Talis est angulus DAB (*fig.* 30. *Tab.* I.) sicuti etiam CAB, qui fiunt a recta tangente CD, & a chorda AB ducta per punctum contactus A. Angulus porro DAB dicitur *angulus segmenti minoris* AaB; *majoris* vero *segmenti* AdB *angulus* CAB. Segmentum quoque AdB vocatur *alternum*, si ad angulum DAB referatur, sicuti etiam segmentum AaB, si cum angulo CAB comparetur.

DEFINITIO VIII.

250. *Duæ rectæ lineæ in circulo dicuntur æqualiter distare ab illius centro cum æquales sunt rectæ perpendiculares, quæ ab ipso centro in illas cadunt.* Sic rectæ BC, DE in circulo BE (*fig.* 31. *Tab.* I.) æqualiter distabunt ab illius centro *a*, si rectæ perpendiculares *ab*, *ae* fuerint inter se æquales.

THEOREMA I.

Si radius circuli ad angulos rectos chordam secuerit; ipsam, ejusque arcum bifariam secabit; & vicissim radius circuli chordam bifariam secans, est ipsi chordæ perpendicularis.

I.

251. Radius DE circuli AEB (*fig.* 32. *Tab.* I.) secet ad angulos rectos chordam AB. Dico, illam bifariam dividere.

Demonstratio.

Ductis radiis DA, DB ad extrema chordæ AB, cum isti sint æquales inter se (§. 241.), anguli DAB, DBA erunt æquales (§. 187). Æquales sunt autem per hypothesim

etiam duo DaA, DaB. Ergo itidem reliquus BDa reliquum ADa æquabit (§. 178). Latus porro AD trianguli ADa adæquat latus DB trianguli BDa, & latus Da est commune utrique triangulo. Igitur etiam unius basis Aa basim aB alterius æquabit (§. 195); adeoque &c.

I I.

252. Dico, radium DE dividere bifariam etiam arcum AEB.

Demonstratio.

Cum enim anguli ADE, EDB, ut modo ostensum est, sint æquales, etiam arcus AE, EB erunt æquales (§. 246).

I I I.

253. Vicissim vero radius DE bifariam dividat chordam AB. Dico, radium DE ad perpendiculum illi incumbere.

Demonstratio.

Cum enim ob æqualitatem radiorum DA, DB triangulum ADB sit isosceles (§. 167), recta Da ad perpendiculum propter hypothesim illius basi AB insistet (§. 168); adeoque &c.

THEOREMA II.

Si in circulo recta quædam linea aliam rectam bifariam & ad angulos rectos secuerit, erit in ipsa secante centrum circuli.

254. Recta DE in circulo AEB (*fig.* 32. *Tab.* I.) bifariam & ad angulos rectos dividat chordam AB. Dico, in recta DE esse centrum ipsius circuli.

De-

Demonstratio.

Si namque fieri potest, centrum circuli sit extra rectam DE, sitque illud punctum *b*. Ducatur autem a puncto *b* ad punctum sectionis *a* recta *ba*. Hæc erit rectæ AB perpendicularis (§. 253). Eidem autem AB posita est perpendicularis etiam recta D*a*. Igitur utraque D*a*, *ba* in eodem plano ad idem punctum *a* eidem rectæ AB perpendiculariter incumbit. Hoc autem repugnat (§. 133). Ergo punctum *b* non est centrum circuli AEB; & eadem ratione nullum extra rectam DE. Igitur &c.

THEOREMA III.

Recta ducta per extremum radii ad angulos rectos circulum tangit; & vicissim, si a centro circuli ad punctum, in quo circulus a recta tangitur, recta ducatur, erit ipsi tangenti perpendicularis.

I.

255. Per extremum punctum B radii FB (*fig. 32. Tab. I.*) ducatur recta DE ad angulos rectos. Dico, rectam DE tangere circulum in puncto B.

Demonstratio.

Ducta enim a centro F ad quodvis punctum C rectæ DE recta FC, cum recta FB, utpote perpendicularis, sit minima omnium rectarum, quæ a centro F in rectam DE cadere possunt (§. 185), recta FB erit minor recta FC. Igitur punctum extremum C reperitur extra peripheriam circuli AB. Idipsum eodem modo de omnibus aliis punctis rectæ DE a puncto B diversis demonstrabitur. Recta ergo DE tangit ipsum circulum AB.

 256. Vi:

II.

256. Viciſſim vero recta DE tangat circulum AB in puncto B, ad quod a centro F ducatur recta FB. Dico, rectam FB rectæ DE ad perpendiculum incumbere.

Demonſtratio.

Cum enim cetera puncta rectæ DE cadant propter hypotheſim extra peripheriam circuli AB, quævis recta diverſa a recta FB, ducta a centro F ad rectam DE, ut recta FC, major erit ipſa FB. Ergo nulla harum rectarum poteſt rectæ DE ad perpendiculum incumbere, cum ſcilicet perpendicularis ſit omnium minima (§. 185). Recta igitur FB perpendicularis eſt rectæ DE; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

257. *Recta non tangit circulum niſi in puncto.* Etenim, ſi ſecus, duæ perpendiculares ex eodem puncto ad eandem rectam duci poſſent (§. 256) quod repugnat (§. 174).

COROLLARIUM II.

258. *Si a centro circuli ad rectam tangentem perpendicularis ducatur, hæc cadet in punctum contactus.* Non enim cadere poteſt extra, quin duæ rectæ perpendiculares ex ipſo centro in eandem rectam tangentem duci queant; cum ſcilicet etiam recta ducta a centro circuli ad punctum contactus, ſit tangenti perpendicularis (§. 256).

THEO-

THEOREMA IV.

Si recta circulum tangat, atque a puncto contactus recta intra circulum excitetur, quæ tangenti ad perpendiculum incumbat, erit in illa centrum circuli.

259. Recta DE tangat circulum AB in puncto B (*fig.* 33. *T.* I) a quo intra circulum excitetur recta perpendicularis BF. Dico, in recta FB esse centrum ipsius circuli.

Demonstratio.

Si enim fieri potest, centrum circuli AB sit punctum *a* extra rectam FB. Igitur recta *a*B erit tangenti DE perpendicularis (§. 256). Hoc autem repugnat (§. 174); cum eidem DE posita sit perpendicularis etiam recta FB. Ergo &c.

THEOREMA V.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; & vicissim, quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales.

I.

260. In circulo BDC (*fig.* 31. *Tab.* I.) sint rectæ æquales BC, DE. Dico, eas distare æqualiter a centro *a*, videlicet perpendicula *ab*, *ae* esse æqualia.

Demonstratio.

Ductis radiis *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, cum isti sint æquales (§. 241), sicuti etiam rectæ BC. DE ex hypothesi, duo triangula B*a*C, D*a*E erunt inter se mutuo æquilatera, ac proinde etiam æquiangula (§. 193), angulus nempe BC*a* erit æqualis angulo DE*a*. Est autem latus *b*C trianguli *b*C*a* æquale lateri *e*E trianguli *e*E*a* (§. 251), sicuti etiam latus *a*C

*a*C lateri *a*E (§. 251). Ergo etiam bases, sive perpendicula *ab*, *ae* erunt æqualia (§. 195.).

II.

261. Vicissim vero rectæ BC, DE æqualiter distent a centro *a*, perpendicula nimirum *ab*, *ae* sint æqualia. Dico, etiam ipsas rectas BC, DE esse æquales.

Demonstratio.

Ductis tradiis *a*C, *a*E, cum ob hypothesim perpendiculorum *ab*, *ae*, duo triangula *ab*C, *ae*E sint rectangula, quadratum radii *a*C erit æquale quadratis laterum *ab*, *b*C, & quadratum radii *a*E quadratis laterum *ae*, *e*E (§. 232). Quadrata autem radiorum *a*C, *a*E sunt æqualia (§. 213). Ergo duo itidem quadrata laterum *ab*, *b*C æqualia erunt quadratis laterum *ae*, *e*E (§. 24). Quocirca, sublatis quadratis æqualibus æqualium perpendiculorum *ab*, *ae*, quadratum lateris *b*C æquabit quadratum lateris *e*E (§. 27). Igitur ipsa quoque latera *b*C, *e*E sunt æqualia (§. 213); cumque sit BC = 2*b*C, & DE = 2*e*E (§. 251), erit etiam BC = DE (§. 94); ac proinde &c.

THEOREMA VI.

Recta in circulo, quæ per centrum transit, est omnium maxima. Aliarum vero, quæ propinquior est centro, remotiore major est;

In circulo EGF (*fig.* 1. *Tab.* II.) sint plures rectæ lineæ AB, CD, EF, quarum AB per centrum *a* ipsius circuli transeat.

I.

262. Dico primo, rectam AB esse omnium maximam.

De-

Demonstratio.

Ductis radiis *a*C, *a*D, cum recta AB sit æqualis duobus radiis *a*C, *a*D, sicuti duo radii *a*C, *a*D simul sumti majores sunt recta CD (§. 181), ita recta AB major erit ipsa CD (§. 70), eademque ratione recta AB ceteras omnes extra centrum *a* ductas magnitudine superabit.

II.

263. Dico 2, rectam CD proximiorem centro *a* majorem esse remotiore EF.

Demonstratio.

Ducantur radii *a*E, *a*F. Itaque, cum duo *a*C, *a*D æquales sint duobus *a*E, *a*F (§. 241); & angulus C*a*D major sit angulo E*a*F (§. 23), perspicuum remanet, basim quoque, sive rectam CD, majorem esse base, sive recta EF (§. 202). Igitur &c.

COROLLARIUM.

264. *Diameter ergo circuli est omnium rectarum, quæ in ipso circulo duci possunt, maxima*; & vicissim *maxima rectarum, quæ in circulo duci queunt, per illius centrum transit, adeoque illius est diameter.*

THEOREMA VII.

In eodem circulo angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, si uterque eidem arcui insistat

265. Quoniam tribus modis se habere possunt in circulo angulus ad centrum, & angulus ad peripheriam, eidem arcui insistentes, tres casus distinguendi sunt, ut theorema plane ostendatur.

Primus Casus.

Esto angulus EeD (*fig.* 29. *Tab.* I.) ad centrum *e* in circulo EBD, & angulus EBD ad peripheriam, eidem insistentes arcui EaD. Dico, angulum EeD duplum esse anguli EBD.

Demonstratio.

Ex apice B per centrum *e* ducta recta B*a*, cum duo anguli DB*e*, *e*DB trianguli B*e*D ob æqualitatem laterum *e*B, *e*D (§. 241) sint æquales (§. 187), & angulus *ae*D adæquet duos ipsos DB*e*. *e*DB simul sumtos (§. 180), angulus *ae*D erit duplus anguli *e*BD. Est autem eadem ratione etiam angulus E*ea* duplus anguli EB*e*. Ergo totus E*e*D duplus erit totius EBD (§. 101).

Secundus Casus.

Angulus ad centrum sit E*e*D, & EAD angulus ad peripheriam. Dico, angulum E*e*D esse duplum anguli EAD.

Demonstratio.

Patet ex precedenti. Eodem enim modo, quo ostensum est, angulum *ae*D duplum esse anguli *e*BD, demonstrabitur etiam, angulum E*e*D duplum esse anguli EAD.

Tertius Casus.

Sit angulus B*a*C (*fig.* 2. *Tab.* II.) ad centrum, & angulus BDC ad peripheriam. Dico, angulum B*a*C duplum esse anguli BDC.

Demonstratio.

Ducta ex apice D per centrum *a* recta D*e*, patet ex demon-

monstratione primi casus, angulum *ea*C esse duplum anguli *e*DC, & angulum *ea*B anguli *e*DB. Ergo etiam reliquus B*a*C duplus est reliqui BDC (§. 103).

COROLLARIUM I.

266. *Omnes anguli qui in eadem circuli portione consistunt, sunt æquales*. Nimirum æquales sunt anguli EBD, EAD (*fig* 29. *Tab*. I.) in eadem portione EBAD circuli EDB consistentes. Etenim eorum quilibet est medietas anguli E*e*D in centro positi.

COROLLARIUM II.

267. *Mensura anguli ad circuli peripheriam consistentis est medietas arcus, cui insistit*. Sic mensura anguli EBD (*fig*. 29. *Tab*. I.) est pars dimidia arcus E*a*D, scilicet arcus E*a*. Totus enim arcus E*a*D metitur angulum E*e*D (§. 245), qui est duplus anguli EBD. Hinc

COROLLARIUM III.

268. *Angulus in semicirculo consistens rectus est; qui in portione majori, minor; & qui in minori, major est recto*. Rectus nimirum est angulus AB*e* (*fig*. 30. *Tab*. I.) positus in semicirculo A*a*B*e*; acutus angulus *e*AB positus in portione *e*A*a*B majori semicirculo; obtusus vero angulus A*a*B, qui in portione A*a*B minori semicirculo reperitur. Cum enim tota peripheria circuli metiatur quatuor angulos rectos, qui circa centrum fieri possunt (§. 130), quarta pars peripheriæ erit mensura anguli recti; arcus major quadrante erit mensura anguli obtusi; & arcus quadrante minor metietur angulum acutum. Mensura autem anguli AB*e* in semicirculo positi est pars dimidia semiperipheriæ A*de*, sive quadrans totius peripheriæ; mensura anguli *e*AB est pars dimidia arcus *e*B, adeoque arcus minor quadrante, & men-

mensura Anguli A*a*B est pars dimidia arcus A*de*B, ac proinde arcus major quadrante. Ergo &c.

COROLLARIUM IV.

269. Quamobrem vicissim *portio circuli, quæ rectum angulum continet, semicirculus est; major semicirculo, quæ acutum; minor vero semicirculo, quæ obtusum angulum comprehendit*. Etenim, si secus neque angulus rectus in semicirculo; neque acutus in portione majori; neque obtusus in portione minori semicirculo contineretur.

COROLLARIUM V.

270. Sequitur postremo, *omnis quadrilateri in circulo positi duos angulos ex adverso simul sumtos æquare duos rectos*. Nimirum angulos A*a*B, A*e*B quadrilateri A*e*B*a* (*fig.30. T.* I.) consistentis in circulo A*d*B summam duorum rectorum conficere. Cum enim mensura anguli A*a*B sit pars dimidia arcus A*d*B, & mensura anguli A*e*B sit medietas arcus A*a*B (§.267), semiperipheria circuli A*d*B valorem definiet ipsorum angulorum A*a*B, A*e*B. Hæc autem est mensura duorum angulorum rectorum. Ergo &c.

THEOREMA VIII.

Si recta circulum tangat, & a puncto contactus recta intra circulum excitetur, erunt anguli in puncto contactus producti iis æquales, qui fiunt in alternis portionibus ipsius circuli.

271. Recta CD tangat circulum A*d*B (*fig.30.Tab.* I.) in puncto A, a quo intra ipsum circulum recta ducatur,

Casus 1.

Et quidem primo, quæ transeat per centrum *b* ipsius circuli, sitque recta A*e*. Dico, angulum DA*e* æqualem esse

esse angulo *Ade*, & angulum CA*e* angulo AB*e*, qui fiunt in alternis ipsius circuli portionibus.

Demonstratio.

Constat enim, tam angulos CA*e*, DA*e* (§. 256), quam angulos AB*e*, *Ade* (§. 268) esse rectos; omnesque angulos rectos esse inter se æquales (§. 126).

Casus II.

Cadat modo recta ducta a puncto contractus A extra centrum, ut recta A*a*, sitque in portione A*a*B angulus A*a*B, & in portione A*d*B angulus A*d*B. Dico, angulum CAB æquare angulum A*a*B, & angulum DAB angulo A*d*B esse æqualem.

Demonstratio.

A puncto A per centrum *b* ducta intelligatur recta A*e*; & jungantur puncta B, *e* recta B*e*. Itaque, cum angulus AB*e*, utpote in semicirculo, sit rectus (§. 268) reliqui duo BA*e*, A*eB* erunt uni recto æquales (§. 177); ac proinde simul sumti æquabunt angulum DA*e*, utpote qui itidem est rectus (§. 256). Sublato propterea communi *BAe*, reliquus A*eB* æquabit reliquum DA*B* (§. 27). Angulus autem A*dB* est æqualis angulo A*eB* (*fig.* 266). Ergo æqualis erit etiam angulo DA*B* (§. 25). Rursus, cum duo anguli A*d*B, A*aB* in quadrilatero A*dBa* valeant duos rectos (§. 270), æquales erunt duobus CA*B*, DA*B*, qui duobus itidem rectis sunt æquales (§. 127). Ostensum est autem, angulum DA*B* esse æqualem angulo A*dB*. Ergo etiam angulus CA*B* æqualis erit angulo A*a*B (§. 27); ac proinde &c.

COROLLARIUM.

272. ***Duæ rectæ circulum tangentes, si ab eodem puncto ductæ***

ctæ fuerit, *erunt inter se æquales*. Sic æquales erunt rectæ *eb*,*ed* (*fig.* 1. *Tab.* II.) circulum tangentes AGB. Nam ducta per puncta contactus recta *bd*, cum anguli *ebd*, *edb* sint æquales inter se (§. 24), utpote illi æquales, qui fieret in alterna portione *b*E*d* (§. 271), latera quoque *eb*, *ed* trianguli *bed* erunt inter se æqualia (§. 188).

THEOREMA IX.

Si in circulo punctum a centro diversum sumatur, ab eoque plures rectæ in circuli peripheriam ducantur, illa erit omnium maxima, quæ per centrum transit; minima illius complementum; aliarum vero proximior maximæ remotiore major est; ac nonnisi duæ inter se æquales ab illo puncto in circuli peripheriam cadere possunt.

Sumto in circulo ACE (*fig.* 3. *Tab.* II.) puncto *b* diverso a centro *a*, ducantur ab illo in peripheriam circuli rectæ quotcunque *b*A, *b*B, *b*C, *b*D.

I.

273. Dico primo, rectam *b*A per centrum transeuntem, esse omnium maximam.

Demonstratio.

Ducto radio *aB*, cum duæ *a*A, *aB* sint æquales (§. 241), recta *b*A æquabit duo latera *aB*, *ab* trianguli *Bab* (§. 26). Hæc autem majora sunt base *Bb* (§. 181). Ergo etiam recta *b*A rectam *bB* excedet, eademque ratione ceteras omnes, quæ a puncto *b* in peripheriam duci possunt.

II.

274. Dico 2, complementum *b*D rectæ AD esse omnium minimam;

De-

Demonstratio.

Ducto radio *a*C, cum duæ *ab*, *b*C majores sint recta *a*C (§. 181), sitque *a*D rectæ *a*C æqualis (§. 241), duæ *ab*, *b*C majores quoque erunt recta *a*D (§. 71). Quamobrem, sublata communi parte *ab*; reliqua *b*C erit major reliqua *b*D (§. 29). Eodem modo ostendam, rectam *b*D a ceteris omnibus deficere.

III.

275. Dico 3, rectam *b*B proximiorem maximæ *b*A majorem esse remotiore *b*C.

Demonstratio.

Cum enim radii *a*B, *a*C sint æquales (§. 241), duo latera B*a*, *ab* trianguli B*ab* æqualia erunt duobus lateribus C*a*, *ab* trianguli C*ab*, alterum alteri. Angulus autem B*ab* est major angulo C*ab* (§. 23). Ergo etiam basis B*b* major erit base C*b* (§. 202).

IV.

276. Dico 4, nonnisi binas rectas inter se æquales a puncto *b* in peripheriam ACE cadere posse.

Demonstratio.

Ducta recta, sive radio *a*E, angulus *ba*E ponatur æqualis angulo *ba*C, & ducatur recta *b*E. Cum igitur radii *a*E, *a*C sint æquales (§. 241), & recta *ab* sit communis utrique triangulo *ba*E, *ba*C, bases *b*E, *b*C ob æqualitatem angulorum *ba*E, *ba*C erunt æquales (§. 195). Quævis autem alia linea diversa ab ipsis *b*E, *b*C vel est proximior maximæ *b*A, vel ab illa remotior, quam sint rectæ *b*E, *b*C. Ergo erit ipsis vel major, aut minor (§. 275); adeoque &c.

Co-

COROLLARIUM I.

277. Hinc *illud punctum est centrum circuli, ex quo tres rectæ inter se æquales in peripheriam cadunt*; ac proinde

COROLLARIUM II.

278. *Si in circulo duæ rectæ æquales bifariam sese mutuo secuerint, punctum sectionis erit centrum ipsius circuli.*

THEOREMA X.

Si extra circulum sumatur punctum, ab eoque plures rectæ in ciruli peripheriam cadant, earum, quæ in concavam cadunt partem, maxima est, quæ per centrum transit; aliarum vero proximior maximæ remotiore major est. At earum, quæ cadunt in partem convexam, minima est, quæ inter datum punctum, & circuli diametrum directe jacet; aliarum vero ea est minor quæ est proximior minimæ. Duæ postremo dumtaxat inter se æquales in ipsam peripheriam cadere possuno.

A puncto B sumto extra circulum ACc (*fig.*4. *Tab.* II.) ducantur in illius peripheriam plures rectæ BA, BD, BC, quarum BA per centrum *a* transeat.

I.

279. Dico primo, rectam BA esse maximam omnium, quæ in concavam peripheriæ partem cadunt.

Demonstratio.

Ducto radio *a*D, cum radii *a*A, *a*D, sint æquales (§. 241), recta BA æqualis erit duabus B*a*, *a*D simul sumtis (§. 26).

Duæ

Duæ autem Ba, aD majores sunt recta BD (§. 181). Ergo etiam recta BA major erit recta BD (§. 70). Eodem modo ratiocinare de aliis.

II.

280. Dico 2, rectam BD proximiorem maximæ BA majorem esse remotiore BC.

Demonstratio.

Ducto radio aC, cum duo latera aD, aC sint æqualia (§. 241), latus aB sit commune utrique triangulo DaB, CaB, & angulus DaB sit major angulo CaB, basis DB erit major base CB (§. 202); adeoque &c.

III.

281. Dico 3, rectam Bb, quæ directe jacet inter punctum B, & diametrum Ab, esse minimam omnium Be, BC, quæ cadunt in convexam peripheriæ partem ceC.

Demonstratio.

Ducatur radius ae. Itaque, cum duæ ab, ae sint æquales (§. 241), & duæ ae, eB majores sint recta aB (§. 181), sublatis æqualibus ae, ab, reliqua eB erit major reliqua bB (§. 29), Eodem modo ostendam, rectam CB majorem esse ipsa bB; & ideo &c.

IV.

282. Dico 4, rectam BE proximiorem minimæ bB minorem esse remotiore CB.

Demonstratio.

Cum enim duæ aC, CB majores sint duabus ae, EB (§. 191);
&

& rectæ aC, ae sint æquales (§. 241) his sublatis, reliqua CB major erit reliqua eB (§. 29).

V.

283. Dico 5, nonnisi binas rectas a puncto B in peripheriam circuli AcD cadere posse.

Demonstratio.

Posito ad centrum a angulo Bac æquali angulo Bae, cum duæ ae, ac sint æquales (§. 241), & recta aB sit latus commune utrique triangulo caB, eaB, erit basis Bc æqualis basi Be (§. 195). Cumque alia quævis recta ducta a puncto B in peripheriæ partem ceC sit vel proximior minimæ Bb, vel ab illa remotior, patet, nullam aliam esse posse ipsis Be, Bc æqualem (§. 282). Eodem modo demonstrabitur, nonnisi duas rectas inter se æquales cadere itidem posse ex puncto B in partem concavam CDA peripheriæ ipsius circuli; adeoque &c.

CAPUT IV.

De planarum figurarum ratione, & similitudine.

DEFINITIO I.

284. *Figuræ rectilineæ ejusdem generis dicuntur similes, quæ sunt inter se mutuo æquiangulæ, & habent latera circa æquales angulos proportionalia.* Similia nimirum erunt triangula ABC, abc (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.), si angulus A fuerit æqualis angulo a, angulus B angulo b, & angulus C angulo c, simulque fuerint latera circa illos proportionalia, fuerit nempe AB. AC = ab. ac, BC. CA = bc. ca, CA. AB = ca. ab.

CO-

COROLLARIUM I.

285. Hinc *figuræ planæ rectilineæ ejusdem generis inter se mutuo æquilateræ & æquiangulæ, sunt sibi mutuo similes.*

COROLLARIUM II.

286. *Omnes figuræ rectilineæ regulares ejusdem generis sunt sibi mutuo similes.* Sunt enim inter se mutuo æquiangulæ (§. 238); cumque earum quælibet sit æquilatera, habent latera circa æquales angulos proportionalia.

COROLLARIUM III.

287. Cum omnia latera figuræ rectilineæ regularis sint æqualia, *quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius figuræ regularis ejusdem generis.*

DEFINITIO II.

288. *Duo arcus, duo sectores, duoque circulorum segmenta dicuntur similia, quæ eandem habent rationem ad integram sui circuli peripheriam, aut aream.* Nimirum similes erunt arcus BC, *bc* (*fig.* 7. 8. *Tab.* II.) duorum circulorum DBC, *dbc* si, ut arcus BC ad totam peripheriam DBC, ita fuerit arcus *bc* ad totam peripheriam *bdc*. Similes quoque erunt sectores BAC, *bac*, si itidem fuerit sector BAC ad totum circulum DBC, ut sector *bac* ad totum circulum *dbc*. Eodem modo loquere de segmentis.

COROLLARIUM.

289. Cum partes similes duarum magnitudinum sint directe inter se, ut ipsæ magnitudines totales (§. 94) *arcus similes duorum circulorum erunt directe, ut integræ eorundem*

peripheriæ; & ſectores ſimiles, ſicuti etiam ſimilia ſegmenta, ut integri ipſi circuli.

DEFINITIO III.

290. *Duæ figuræ rectilineæ ſimiles dicuntur ſuper duas rectas ſimiliter deſcriptæ, cum duæ ipſæ lineæ ſunt latera ipſarum homologa, & æquales earundem anguli eodem modo ſeſe conſequuntur.* Ut ſi rectæ BC, *bc* (*fig.* 5. 9. *Tab.* II.) fuerint latera homologa ſimilium triangulorum ABC, *abc*, fueritque angulus B æqualis angulo *b*, angulus C æqualis angulo *c*, & angulus A angulo *a*, duo ipſa triangula erunt ſuper rectas BC, *bc* ſimiliter deſcripta.

DEFINITIO IV.

291. *Duo parallelogramma, ſicuti etiam duo triangula plana rectilinea, dicuntur reciprocare ſibi mutuo baſes, & altitudines, cum unius baſis eſt ad baſim alterius, ut reciproce altitudo poſterioris ad altitudinem prioris.* Ut ſi baſis *bc* fuerit ad baſim BC, ut altitudo AX ad altitudinem *ax* (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.), tam duo parallelogramma *ec*, EC, quam duo triangula *bac*, CAC, dicentur reciprocare ſibi mutuo baſes, & altitudines.

DEFINITIO V.

292. *Centrum figuræ rectilineæ regularis eſt punctum ſumtum in illius area, a quo omnes rectæ ductæ ad ſingulos ipſius figuræ angulos, ſunt inter ſe æquales.* Ut ſi æquales inter ſe fuerint rectæ *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, *a*E (*fig.* 27. *Tab.* I.) ductæ a puncto *a* ad ſingulos angulos hexagoni regularis ACE, punctum *a* erit ipſius hexagoni centrum. Extare porro in qualibet figura rectilinea regulari hujuſmodi punctum, ex eo evincitur, quod cuilibet figuræ rectilineæ regulari circulus circumſcribi poſſit, cujus peripheria per apices omnium angulorum ipſius figuræ ſimul tranſeat.

De-

DEFINITIO VI.

293. *Radius figuræ rectilineæ regularis est qualibet recta linea ducta ab illius centro ad angulorum apices*. Sic quælibet rectarum *aB*, *a*C, *a*D &c. est radius hexagoni regularis ACE (*fig*. 27. *Tab*. I.)

COROLLARIUM.

294. Cum omnia isoscelia triangula A*a*B, B*a*C, C*a*D &c. determinata a radiis *a*A *aB* &c. sint inter se mutuo æquilatera, ac proinde etiam æquiangula (§. 193), & æqualia (§. 165), patet, *figuram quamcumque rectilineam regularem dividi posse in tot isoscelia, inter se mutuo æquilatera, æquiangula, & æqualia triangula, quot sunt ipsius figuræ latera; omnesque horum triangulorum verticales angulos in centro positos, esse æquales inter se*; ac proinde *quatuor angulos rectos, qui fieri possunt circa centrum figuræ* (§. 130) *in tot angulos tunc æquales divisos esse, quot sunt ipsius figuræ latera*.

AXIOMA.

295. *Figuræ, quæ eidem sunt similes, sibi quoque mutuo sunt similes*.

Hypothesis I.

296. Linea quæcunque assumitur veluti composita ex punctis, videlicet ex magnitudinis adeo exiguis, ut earum quælibet sit minor quacunque assignabili quantitate.

Hypothesis II.

297. Concipitur parallelogrammum oriri ex parallela elevatione rectæ lineæ in eodem semper plano existentis,

quam elevationem metitur ipsius parallelogrammi altitudo. Sic parallelogrammum ABCD (*fig.* 11. *Tab.* II.) oritur ex parallela elevatione basis *BC* in eodem semper existentis plano, cujus elevationis mensura est altitudo DE.

COROLLARIUM.

298. Cum in hujusmodi elevatione rectæ generatricis BC toties ipsa recta sumatur, quot sunt puncta in altitudine DE, *componitur parallelogrammum quodcunque ex tot rectis lineis inter se æqualibus, & parallelis, quot in illius altitudine puncta numerantur*. Ut si quinque fuerint puncta in altitudine DE, parallelogrammum *A*B*C*D constabit ex quinque rectis lineis æqualibus & parallelis *BC*, *ab*, *cd*, *fe*, AD. Spectari idcirco optime potest parallelogrammum veluti factum ex ductu basis in altitudinem, ut proinde, si basis BC ponatur $= m$, & altitudo DE $= n$, productum mn aream parallelogrammi ABCD optime exprimat.

LEMMA.

Rectæ parallelæ, quæ rectam oblique incidentem in partes æquales dividunt, habent intervalla æqualia; & vicissim parallelæ æqualia intervalla habentes; rectam oblique incidentem in partes æquales dividunt; & si in eas duæ rectæ parallelæ inciderint, in partes æquales dividuntur.

I.

299. Recta *ac* (*fig.* 12. *Tab.* II.) oblique incidens in rectas parallelas MN, PQ, RS dividatur in partes æquales *ab*, *bc*. Dico, rectas MN, PQ, RS æqualia intervalla habere, nimirum æqualia esse perpendicula *ae*, *bm*.

Demonstratio.

Cum anguli *bcm*, *abe* sint æquales (§. 151) sicuti etiam angu-

anguli *bmc*, *aeb* (§. 123), utpote recti ex hypothesi, etiam reliquus angulus *cbm* trianguli *cbm* æqualis erit reliquo *bae* trianguli *bae* (§. 178). Æqualia autem posita sunt latera *bc*, *ab*, quæ illis adjacent. Ergo latera quoque *bm*, *ae* erunt æqualia (§. 199).

II.

300. Vicissim vero æqualia sint perpendicula *ae*, *bm* rectarum parallelarum MN, PQ, RS. Dico, partes *ab*, *bc* esse æquales.

Demonstratio.

Ostensa, ut in præcedenti, æqualitate angulorum *cbm*, *bae* in triangulis *mbc*, *eab*, cum angulis æqualibus *cbm*, *bae* & *bmc*, *aeb* æqualia ex hypothesi adjaceant latera *bm*, *ae*, latus quoque *bc* erit æquale lateri *ab* (§. 199).

III.

301. In rectas parallelas MN, PQ, RS (*fig.* 12. *Tab.* II.) æqualia habentes intervalla incidant rectæ parallelæ *ac*, *nf*. Dico, omnes earum partes *ab*, *bc*, *nd*, *df* esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim propter hypothesim quadrilatera *ndba*, *bdfc* sint parallelogramma, æqualia erunt latera *ab*, *nd*, sicuti etiam *bc*, *df* (§. 222). Est autem etiam $ab = bc$, & $nd = df$ (§. 300). Ergo erit $ab = bc = nd = df$ (§. 24).

THEOREMA I.

Si in triangulo plano rectilineo ducatur recta basi parallela, secans utrumque trianguli latus, proportionaliter latera ipsa secabit: segmenta unius erunt in eadem proportione ad segmenta alterius: utrumque latus eandem ad sua respective segmenta rationem habebit: segmenta laterum erunt, ut ipsa latera: basis erit ad secantem, ut latus ad segmentum; & ut latus ad basim, ita erit segmentum ad rectam secantem.

In triangulo NMP (*fig.* 13. *Tab.* H.) ducatur recta RS basi NP parallela.

I.

302. Dico 1, rectam RS proportionaliter secare latera NM, MP, hoc est esse MR. RN = NS. SP.

Demonstratio.

Latus MN ponatur divisum in quinque partes æquales M*a*, *ac*, *c*R, R*e*, *e*N, ex quibus tres sint in segmenta MR, & quæ in segmento RN. Ex punctis autem *a*, *c*, *e* ductæ intelligantur ad latus oppositum MP rectæ *ab*, *cd*, *ef* parallelæ rectis RS, NP, atque adeo etiam inter se, quæ intervalla æqualia habebunt (§. 299). Itaque divisum erit etiam latus MP in quinque partes æquales M*b*, *bd*, *d*S, S*f*, *f*P (§. 300), & ea quidem lege, ut tres sint in segmento MS, & duæ in segmento SP. Ergo erit MR. RN = MS. SP (§. 38).

II.

303 Dico 2, esse RN. SP = MR. MS:

Demonstratio.

Quippe, cum sit MR. RN = MS. SP (§. 302), erit etiam

tiam *alternando* RN.SP=MR.MS (§. 92).

III.

304. Dico 3, esse MN.MR=MP.MS; nec non MN.RN=MP.SP.

Demonstratio.

Cum enim sit MR.RN=MS.SP (§. 302), etiam *componendo* erit MN.MR=MP.MS (§. 97), sicuti etiam MN.AN=MP.SP (§. 95).

IV.

305. Dico 4, segmenta esse, ut ipsa latera, nimirum esse MR.MS=MN.MP, sicuti etiam RN.SP=MN.MP.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit MN.MR=MP.MS, & MN.RN =MP.SP (§. 304), erit etiam *invertendo*, MR.MN= MS.MP, & RN.MN=SP.MP (§. 95). Quamobrem *alternando*, erit quoque MR.MS=MN.MP, & RN.SP=MN.MP (§. 62).

V.

306. Dico 5, basi NP (*fig.* 14. *Tab.* II.) esse ad rectam secantem RS, ut latus MN ad segmentum MR.

Demonstratio.

Nam, posita divisione lateris MN in quinque partes, ut supra, ductisque rectis *ab*, *cd*, Rg, *ef* parallelis lateri MP divisa erit basis NP in quinque partes æquales, ex quibus tres erunt, scilicet Rm, mn, nS, in recta secante RS (§. 301).

Ergo erit, ut latus MN ad segmentum MR. ita basis NP ad secantem RS, nimirum ut 5 ad 3.

VI.

307. Dico 6, segmentum MR lateris MN esse ad rectam secantem RS, ut est totum latus MN ad basim NP.

Demonstratio.

Quippe, cum sit MN. MR=NP.RS (§. 306), erit quoque *alternando*, MR.RS=MN.NP (§. 92). Itaque &c.

COROLLARIUM I.

308. *In triangulo plano rectilineo recta ducta a vertice ad basim, in eadem proportione secat basim, & rectam basi parallelam.* Sic in triangulo *bac* (*fig.* 15. *Tab.* II.) recta *am* ducta a vertice *a* ad basim *bc* ita secat ipsam basim, rectamque illi parallelam *de*, ut sit *bm*. *mc* = *dn*. *ne*. Cum enim sit *bm*. *dn* = *am*. *an*, sicuti etiam *cm*. *en* = *am*. *an*(§. 307), erit quoque *bm*. *dn* = *cm*. *en*(§. 25); adeoque etiam *bm*. *cm* = *dn*. *ne* (§. 92).

COROLLARIUM II.

309. *In omni triangulo plano rectilineo recta basi parallela aufert triangulum simile toti triangulo.* Nimirum ducta in triangulo *bam* (*fig.* 15. *Tab.* II.) recta *dn* parallela basi *bm*, triangulum *dna* erit simile toti triangulo *bma*. Duo enim hujusmodi triangula sunt sibi mutuo æquiangula; cum angulus *adn* adæquet angulum *abm*, & angulus *and* angulum *amb* (§. 150), angulus vero *bam* sit communis utrique triangulo. Habent etiam latera circa æquales angulos proportionalia; cum sit *ad*. *dn*=*ab*. *bm*, sicuti etiam *dn*. *na*= *bm*. *ma* (§. 307), necnon *ad*. *an* = *ab*. *am* (§. 305).

Co-

COROLLARIUM III.

310. *Triangula æquiangula sunt similia*. Ut si angulus A trianguli ABC fuerit æqualis angulo *a* trianguli *abc* (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.) angulus B angulo *b*, & angulus C angulo *c*, duo triangula ABC, *abc* erunt similia. Cum enim anguli BAC, *bac* ob æqualitatem sibi mutuo congruant, nequit triangulum BAC superimponi triangulo *bac*, quin, congruentibus angulis A, *a*, basis BC sit parallela basi *bc* (§. 146.) ob æqualitatem scilicet angulorum ABC, *abc*; adeoque &c. (§. 309).

COROLLARIUM IV.

311. Cum in triangulis similibus ABC, *abc* (*fig.* 5. 6. *T.* II.) homologa sint latera AB *ab*, BC, *bc*, CA, *ca* (§. 52), & æquales anguli A, *a*, B, *b*, C, *c*, perspicuum remanet, *in triangulis similibus homologa esse latera, quæ æqualibus angulis opponuntur*, & vicissim *angulos esse æquales, qui homologis lateribus subtenduntur*.

THEOREMA II.

Recta ita secans duo trianguli latera, ut segmenta sumta a vertice sint directe inter se, ut ipsa latera, est basi parallela.

312. Recta *de* ita secet latera *ab*, *ac* trianguli *bac* (*fi.* 15. *T.* II.) ut sit *ab* ad *ac*, quemadmodum est *ad* ad *ae*. Dico, rectam *de* esse parallelam basi *bc*.

Demonstratio.

Enimvero; si recta *de* non est parallela basi *bc*, esto recta *dx* ipsi *bc* parallela. Profecto recta *dx* ita non dividit latus *ac* in *x*, ut sit *ac* . *ax* $\sqsupset$ *ac ae* (§. 40) ob inæqualitatem scilicet segmentorum *ae*, *ax*. Est autem *ab* . *ad* $\sqsupset$ *ac* . *ae* (§. 92)

(§. 92) ex eo quod sit $ab.ac = ad.ae$ per hypothesim. Ergo neque erit $ab.ad = ac.ax$. Hoc autem fieri nequit (§. 304), si recta dx sit parallela basi bc. Igitur recta dx non est parallela basi bc; & eadem ratione nulla alia recta diversa a recta de erit bc parallela. Itaque &c. Hinc

COROLLARIUM I.

313. *Recta ita secans duo trianguli latera, ut segmenta sumta a vertice sint directe inter se, ut ipsa latera, aufert triangulum simile toti triangulo* (§. 309).

COROLLARIUM II.

314. Hinc *duo triangula habentia unum angulum uni angulo æqualem, & latera circa illos proportionalia, sunt similia.* Ut si angulus A trianguli BAC fuerit æqualis angulo *a* trianguli *bae* (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.), & latus AB ad latus AC, ut latus *ab* ad latus *ac*, duo ipsa triangula erunt similia.

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo recta perpendicularis ducta ab angulo recto ad basim, duo efficit triangula toti, & inter se similia.

Ab angulo recto BAC trianguli rectilinei BAC (*fig.* 16. *T.* II.) ad basim BC ducta intelligatur recta perpendicularis AD.

I.

315. Dico primo, utrumque triangulum ADB, ADC esse simile toti triangulo BAC.

Demonstratio.

Cum enim ob hypothesim angulus ADB sit rectus, is æqua-

æquabit angulum BAC. Angulus autem ABC est communis utrique triangulo ADB, BAC. Ergo reliquus angulus BAD trianguli ADB æquabit reliquum angulum ACB trianguli BAC (§. 178). Duo igitur triangula ADB, BAC sunt inter se mutuo æquiangula; ac proinde similia (§. 310). Eodem modo demonstrabitur, etiam triangulum ADC esse simile triangulo BAC; & ideo &c.

II.

316. Dico 2, triangula ADB, ADC etiam inter se esse similia.

Demonstratio.

Enimvero, cum duo triangula BDA, CDA sint similia triangulo BAC (§. 315), sibi quoque mutuo erunt similia (§. 295).

COROLLARIUM I.

317. *Recta perpendicularis AD (fig. 16. Tab. II.) est media proportionalis inter partes BD, DC basis BC.* Cum enim anguli BDA, ADC similium triangulorum BDA, ADC, utpote recti, sint æquales, erunt latera circa ipsos proportionalia, erit nempe ∺ BD. DA. DC (§. 274). Hinc

II.

318. *Recta quæcunque in semicirculo incumbens diametro ad angulos rectos est media proportionalis inter partes ipsius diametri.* Sic recta perpendicularis AD in semicirculo BAC (*fig.* 16. *Tab.* II.) est media proportionalis inter segmenta diametri BD, DC. Ductis enim rectis AB, AC, rectus est angulus BAC (§. 268).

COROLLARIUM III.

319. *Latus AC in triangulo rectangulo BAC (fig. 16. Tab. II.) est*

est media proportionalis inter totam basim BC, & partem DC, sicuti etiam latus AB inter totam basim BC, & partem BD. Enimvero, cum similia sint triangula BAC, ADC, sicuti etiam triangula BAC, BDA (§. 315), & angulus *BCA* sit communis utrique triangulo BAC, ADC, quemadmodum etiam angulus ABC utrique triangulo BAC, BDA, proportionalia erunt latera, quæ circa illos *respective* habentur, videlicet erit BC.CA = CA.DC, & BC.BA = BA.BD (§.284).

THEOREMA IV.

Eadem est ratio laterum homologorum duarum figurarum rectilinearum similium.

320. Sint duæ figuræ rectilineæ similes ABC, *abc* (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.) quarum latera homologa sint AB. *ab*, BC, *bc*, CA, *ca*. Dico, esse AB. *ab* = BC. *bc* = CA. *ca*.

Demonstratio.

Enimvero, cum, stante hypothesi, sit AB. BC = *ab*. *bc*, BC. CA = *bc*. *ca*, CA. AB = *ca*. *ab* (§.284), erit quoque AB. *ab* = BC. *bc*, BC. *bc* = CA. *ca*, CA. *ca* = AB. *ab* (§.92); ac proinde AB. *ab* = BC. *bc* = CA. *ca* (§. 24).

THEOREMA V.

Altitudines triangulorum similium, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sunt directe inter se, ut eorum bases.

321. Sint duo triangula similia MNP, *mnp* (*fig.* 17. 18. *Tab.* II.) quorum bases MP, *mp* sint latera ipsorum homologa, altitudines vero rectæ NX, *nx*. Dico, altitudines NX, *nx* esse directe inter se, ut bases MP, *mp*,

Ca-

Casus Primus.

Et quidem primo altitudines NX, *nx* cadant intra ipsorum triangulorum latera.

Demonstratio.

Cum enim anguli M, *m* ex hypothesi sint æquales, sicuti etiam anguli X, *x*, utpote recti (§. 123), etiam reliquus angulus MNX trianguli MNX erit æqualis reliquo angulo *mnx* trianguli *mnx* (§. 178), duoque idcirco triangula MNX, *mnx* erunt sibi mutuo æquiangula, ac proinde similia (§. 310); eruntque latera ipsorum homologa MN, *mn*, NX, *nx* (§. 311). Quamobrem erit NX . *nx* = MN . *mn* (§. 320). Est autem eadem ratione etiam MP . *mp* = MN . *mn*. Ergo erit quoque NX . *nx* = MP. *mp* (§. 25).

Casus Secundus.

Cadant modo altitudines NX, *nx* (*fig.* 19. 20. *Tab.* II.) extra bases MP, *mp*. Adhuc dico, esse NX . *nx* = MP . *mp*.

Demonstratio.

Enimvero, cum tam duo anguli MPN, NPX, quam duo *mpn*, *npx* valeant duos rectos (§. 127), duo MPN, NPX æquales erunt duobus *mpn*, *npx* (§. 24). Æquales sunt autem ex hypothesi duo MPN, *mpn*. Ergo duo quoque NPX, *npx* erunt inter se æquales (§. 27). Constat autem, etiam duos PXN, *pxn* esse æquales inter se, utpote rectos (§. 123). Igitur reliquus itidem angulus PNX trianguli PNX erit æqualis reliquo *pnx* trianguli *pnx* (§. 178) ac proinde duo ipsa triangula, utpote sibi mutuo æquiangula, erunt similia (§. 310), eorumque latera homologa erunt NP, *np*, NX, *nx* (§. 311). Erit ergo NX . *nx* = NP.

NP. *np*. (§. 320). Est autem eandem quoque ob causam MP. *mp* = NP. *np* in triangulis similibus MNP. *mnp*. Ergo erit NX. *nx* = MP. *mp* (§.25).

Casus Tertius.

Altitudines demum triangulorum similium coincidant cum uno eorundem latere. Nimirum sint duo triangula similia MXN, *mxn* (*fig.* 17. 18. *Tab.* II.) quorum altitudines sint latera ipsorum homologa NX, *nx*. Dico, esse NX. *nx* = MX. *mx*.

Demonstratio.

Patet ex §. 320.

THEOREMA VI.

Parallelogramma æqualium basium, & altitudinum sunt æqualia.

322. Æquales sint bases FN, TV parallelogrammorum MN, RV (*fig* 21. 22. *Tab.* II.), sicuti etiam eorum altitudines PX; SQ. Dico, ipsa parallelogramma esse æqualia.

Demonstratio.

Cum enim parallelogrammum MN consurgat ex ductu basis FN in altitudinem PX, & parallelogrammum RV ex ductu basis DV in altitudinem SQ (§.298), si tam bases, quam altitudines sunt *respective* inter se æquales, ipsa quoque parallelogramma erunt æqualia (§. 68).

COROLLARIUM I.

323. *Si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & altitudines, parallelogrammum erit duplum trianguli.* Ut si basis FN parallelogrammi MN fuerit æqualis basi TV, trian-

trianguli TSV (*fig.* 21. 22. *Tab.* II.), & altitudo PX unius altitudini SQ alterius, parallelogrammum MN erit duplum trianguli TSV. Constituto namque parallelogrammo RV, constat parallelogrammum RV esse duplum trianguli TSV (§. 227). Est autem parallelogrammum MN æquale parallelogrammo RV ex facta hypothesi. Ergo etiam parallelogrammum MN est duplum trianguli TSV (§. 70), Hinc

COROLLARIUM II.

324. *Triangula plana rectilinea sunt directe inter se, ut parallelogramma habentia æquales cum illis bases, & altitudines.* Videlicet triangulum *bac* est ad triangulum BAC (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.), ut parallelogrammum *ec* ad parallelogrammum EC (§. 94).

COROLLARIUM III.

325. Quamobrem *triangula plana rectilinea æqualium basium, & altitudinum sunt inter se æqualia* (§. 45).

THEOREMA VII.

Parallelogramma inæqualium basium, sed ejusdem altitudinis sunt directe, ut eorum bases; & quæ habent æquales bases, sed inæquales altitudines, sunt directe, ut altitudines.

I.

326. Parallelogramma AC, FH (*fig.* 23. 24. *Tab.* II.) inæquales habeant bases BC, GH, sed æquales altitudines ED, KL. Dico, parallelogrammum AC esse ad parallelogrammum FH, ut est basis BC ad basim GH.

Demonstratio.

Ponatur basis BC $= x$, & basis GH $= y$; altitudo vero ED,

ED, adeoque etiam KL$=m$. Erit ergo parallelogrammum AC$=mx$, & parallelogrammum FH$=my$ (§. 298). Constat autem, esse $mx.my=x.y$ (§. 77). Ergo erit etiam AC.FH$=x.y$, nimirum ut bases.

II.

327. Sint modo duo parallelogramma FH, NR (*fig.* 24. 25. *Tab.* II.) æquales e contrario habentes bases GH, PR, sed inæquales altitudines KL, NS. Dico, parallelogrammum FH esse ad parallelogramum MR, ut altitudo KL ad altitudinem NS.

Demonstratio.

Haud dissimilis est a præcedenti.

COROLLARIUM I.

328. *Triangula inæqualium basium, & ejusdem altitudinis, sunt directe, ut bases;* & vicissim, *quæ habent æquales bases sunt, ut altitudines*. Triangula enim sunt, ut parallelogramma super easdem bases, & sub iisdem *respective* altitudinibus constituta (§. 324).

COROLLARIUM II.

329. *Si altitudo KL trianguli GKH fuerit æqualis altitudini ED parallelogrammi AC* (*fig* 23. 24. *Tab.* II.); *sed basis GH trianguli dupla basis BC parallelogrammi, erit triangulum GKH æquale parallelogrammo AC*. Est enim tam triangulum GKH (§. 227) quam parallelogrammum AC (§. 326) pars dimidia parallelogrammi FH. Haud dissimili ratione, *si basis GH trianguli GKH fuerit æqualis basi PR parallelogrammi MR* (*fig.* 24. *fig.* 25.), *sed altitudo KL trianguli dupla altitudinis NS parallelogrammi, triangulum GKH parallelogrammo MR erit æquale*.

THEO-

THEOREMA VIII.

Parallelogramma inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

330. Sint duo parallelogramma *ebca*, EBCA (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.), quorum tum bases *bc*, BC, tum altitudines *ax*, AX sint inæquales. Dico, parallelogrammum *ebca* esse ad parallelogrammum EBCA in ratione composita ex ratione basis *bc* ad basim BC, & ex ratione altitudinis *ax* ad altitudinem AX.

Demonstratio.

Basis *bc* ponatur = P, & basis BC = *p*; altitudo *ax* = M, & altitudo AX = *m*. Erit ergo parallelogrammum *ebca* = PM, & parallelogrammum EBCA = *pm* (§. 298). Constat autem, productum PM esse ad productum *pm* in ratione composita ex ratione magnitudinis P ad magnitudinem *p*, & ex ratione magnitudinis M ad magnitudinem *m* (§. 107). Ergo in eadem quoquoque ratione erunt inter se parallelogramma *ebca*, EBCA, adeoque &c.

COROLLARIUM.

331. *Triangula inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.* Sunt enim, ut parallelogramma super easdem *respective* bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 324).

THEOREMA IX.

Parallelogramma reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æqualia.

332. Esto basis *bc* parallelogrammi *ebca* ad basim BC parallelogrammi EBCA (*fig.* 9. 10. *Tab.* II.) *reciproce*, ut altitudo

tudo AX ad altitudinem *ax*. Dico, parallelogramma *ebca*, EBCA esse equalia.

Demonstratio.

Cum ex facta hypothesi sit $bc.BC = AX.ax$, erit $bc \times ax = BC \times AX$ (§.73). Parallelogrammum autem *ebca* est æquale producto $bc \times ax$, & parallelogrammum EBCA producto $BC \times AX$ (§. 298). Ergo erit quoque *ebca* = EBCA (§.24); adeoque &c.

COROLLARIUM.

333. *Triangula reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines sunt æqualia.* Sic duo triangula *bac*, BAC erunt æqualia, si bases *bc*, BC fuerint *reciproce*, ut altitudines AX, *ax*. Sunt enim, ut parallelogramma *ec*, EC (§. 324).

THEOREMA X.

Inæqualium circulorum æquales anguli ad centrum similibus arcubus insistunt; & vicissim, qui similibus arcubus insistunt, sunt æquales.

I.

334. Æquales sint anguli BAC, *bac* (*fig.* 7. 8, *Tab.* II.) in centro positi circulorum inæqualium DBC, *dbc*. Dico, arcus BC, *bc*, quibus insistunt, esse sibi mutuo similes.

Demonstratio.

Cum enim eadem sit ratio utriusque anguli BAC, *bac* ad quatuor rectos (§. 70), eadem erit ratio utriusque arcus BC, *bc* ad integram sui circuli peripheriam (§. 247). Ergo arcus ipsi BC, *bc* sunt sibi mutuo similes (§. 288).

335. Si-

II.

335. Similes viciſſim ſint arcus BC, *be*. Dico, angulos BAC; *bac* eſſe æquales.

Demonſtratio.

Enimvero, cum uterque arcus BC, *bc* eandem habeat rationem ad integram ſui circuli peripheriam (§. 288), eadem quoque erit ratio utriuſque anguli BAC, *bac* ad quatuor rectos (§. 247). Igitur duo ipſi anguli ſunt æquales (§. 70).

COROLLARIUM.

336. *Duo quilibet radii circulorum circa idem punctum deſcriptorum ſimiles arcus intercipiunt*. Similes nimirum ſunt arcus BC, *mn* circulorum DBC, *emn* (*fig.* 7. *Tab.* II.) idem centrum habentium, intercepti inter radios AB, AC. Idem quippe angulus BAC utrique arcui inſiſtit.

LEMMA I.

Si ex centro duorum polygonorum regularium ejuſdem generis ad ſingulos ipſorum angulos ducantur radii, ipſa polygona diviſa erunt in totidem ex æquo triangula ſibi mutuo ſimilia.

337. Sint duo hexagona regularia BDF, *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) ex quorum centro ad ſingulos angulos ducantur radii AB, AC, AD &c. *ab*, *ac*, *ad* &c. Jam patet, hexagonum DBF diviſum eſſe in tot triangula, in quot diviſum eſt hexagonum *dbf*. Dico, triangulum DAE eſſe ſimile triangulo *dae*.

Demonſtratio.

Cum tot habeantur anguli æquales circa centrum A;

 quot

quot sunt circa centrum *a* (§. 294) angulus DAE erit æqualis angulo *dae*. Est autem latus AD ad latus AE, ut latus *ad* ad latus *ae*; quod nempe sit AD = AE, & *ad* = *ae*. Ergo duo triangula DAE, *dae* sunt similia (§. 314). Eodem modo ratiocinare de aliis. Itaque &c.

COROLLARIUM.

338. Cum radii AD, *ad* sint latera homologa triangulorum similium DAE, *dae* (§. 311), sitque propterea AD. *ad* = DE. *de* (§. 320), manifeste apparet, *radios duorum polygonorum regularium ejusdem generis esse directe inter se, ut duo qualibet ipsorum latera.*

THEOREMA XI.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum similium sunt directe inter se, ut duo qualibet homologa ipsarum latera.

339. Sint duæ figuræ rectilineæ similes ABC, *abc* (*fig.* 5. 6. *Tab.* II.), quarum latera homologa sint AB, *ab*, BC, *bc*, CA, *ca*. Dico, perimetrum ABC esse ad perimetrum *abc*, ut est latus BC ad latus sibi homologum *bc*.

Demonstratio.

Enimvero, cum sit AB. *ab* = BC, *bc* = CA. *ca* (§. 320), erit quoque AB + BC + CA. *ab* + *bc* + *ca* = BC. *bc* (§. 101); adeoque &c.

COROLLARIUM

340. *Perimetri polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut duo qualibet ipsorum latera, atque adeo etiam ut eorum radij.* Sic perimeter polygoni regularis BDF est ad perimetrum polygoni regularis *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) ut latus DE ad latus *de*; adeoque etiam ut radius AD ad ra-

radium *ad*. Duo enim hujusmodi polygona sunt similia (§. 286), & homologa sunt ipsorum latera DE, *de* (§. 52); eorumque radii AD, *ad* sunt directe inter se, ut latera DE, *de* (§. 338).

LEMMA II.

Duæ quæcunque figuræ rectilineæ similes in totidem ex æquo similia triangula resolvi possunt.

341. Sint duæ figuræ rectilineæ similes BDF, *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.). Dico, eas in totidem ex æquo similia triangula resolvi posse.

Demonstratio.

Super latera ipsarum homologa DE, *de* erecta concipiantur duo triangula similia, similiterque posita DAE, *dae*. Tum ab horum vertice A, *a* ducantur ad singulos utriusque figuræ angulos rectæ AC, AB &c. *ac*, *ab* &c. Jam patet, utramque figuram divisam esse in tot triangula, quot sunt ipsarum figurarum latera. Dico autem, triangulum DAC simile esse triangulo *dac*, triangulum CAB triangulo *cab*, atque ita de ceteris. Cum enim anguli CDE, *cde* sint æquales (§. 284), sicuti eadem ratione etiam anguli ADE, *ade*, reliquus itidem CDA erit reliquo *cda* æqualis (§. 27). Est autem AD. *ad* = DE. *de* (§. 320), eandemque ob causam etiam CD. *cd* = DE. *de*. Ergo erit AD. *ad* = CD. *cd* (§. 25), & ideo AD. CD = *ad*. *cd* (§. 92): Itaque triangula CDA, *cda*, utpote habentia unum angulum CDA uni angulo *cda* æqualem, & latera circa illos proportionalia, sunt similia (§. 314). Eodem modo ostendentur similia etiam duo CAB, *cab*, & sic de ceteris. Igitur &c.

THEOREMA XII.

Duæ quæcunque figuræ rectilineæ similes sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum.

I.

342. Sint primo duo triangula similia MNP, *mnp* (*fig.* 17. 18. *Tab.* II.). Dico, triangulum MNP esse ad triangulum *mnp* in ratione *duplicata* lateris MP ad latus homologum *mp*.

Demonstratio.

Triangula MNP, *mnp* sunt inter se in ratione composita ex ratione basium MP, *mp*, & ex ratione altitudinum NX, *nx* (§. 331); cumque ratio basium MP, *mp* non sit diversa a ratione altitudinum NX, *nx* (§. 321), triangula ipsa sunt inter se in ratione composita ex ratione basium, sive laterum homologorum MP, *mp* semel ducta in seipsam. Hæc autem est ratio ipsorum laterum *duplicata* (§. 54). Ergo duo triangula MNP *mnp* sunt in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum MP, *mp*.

I I.

343. Sint modo duæ figuræ rectilineæ similes a triangulo diversæ BDF, *bdf* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) quarum latera homologa sint DE, *de*. Dico, eas quoque esse inter se in ratione *duplicata* ipsorum laterum.

Demonstratio

Posita divisione utriusque figuræ in totidem ex æquo triangula similia DAE, *dae*, EAF, *eaf* &c. (§. 341), cum duo quælibet similia triangula sint in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (§. 342), triangulum DAE erit ad

triau-

triangulum *dae* in ratione *duplicata* laterum DE, *de*; triangulum EAF ad triangulum *eaf* in ratione *duplicata* laterum EF, *ef*, atque ita de ceteris. Eadem autem est ratio laterum homologorum figurarum rectilinearum similium (§. 320): Ergo singula triangula constitutiva figuræ BDF erunt ad triangulum sibi simile constitutivum figuræ *bdf* in ratione *duplicata* laterum DE, *de*. Quamobrem tota figura BDF est ad totam figuram *bdf* in ratione *duplicata* lateris DE ad latus homologum *de* (§. 101).

COROLLARIUM I.

344. Hinc vicissim *latera homologa duarum figurarum rectilinearum similium sunt in ratione ipsarum figurarum subduplicata* (§. 57).

COROLLARIUM II.

345. *Duo quæcunque plana rectilinea regularia ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum laterum*. Similia enim sunt inter se (§. 286), & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§. 287).

COROLLARIUM III.

346. *Duæ figuræ rectilineæ similes sunt inter se, ut quadrata suorum laterum homologorum*. Sic duo plana rectilinea similia BDE, *bde* (*fig.* 26. 27. *Tab.* II.) sunt inter se, ut quadrata laterum homologorum DE, *de*. Sunt enim & hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* eorundem laterum DE, *de* (§. 345).

COROLLARIUM IV.

347. *Plana regularia rectilinea ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum radiorum*. Similia siquidem sunt inter se

 (§. 286.)

(§. 286), atque radiorum ratio diversa ab ea non est, quam habent duo quælibet ipsorum latera (§. 338).

COROLLARIUM V.

348. *Plana regularia rectilinea ejusdem generis sunt directe inter se, ut quadrata suorum laterum, & radiorum respective.* Sunt enim & ipsa quadrata in ratione *duplicata* suorum laterum (§. 345).

COROLLARIUM VI.

349. *Si fuerint tres rectæ lineæ continuo geometrice proportionales, figura rectilinea descripta super primam erit ad figuram rectilineam similem similiterque descriptam super secundam, ut illarum prima ad tertiam.* Ut si, positis tribus rectis continuo geometrice proportionalibus *bc, dm, x* (*fig.* 28. 29. *Tab* II.) super primam *bc*, & secundam *dm* similiter describantur duo similia triangula *bac, dem*, triangulum *bac* erit ad triangulum *dem*, ut prima *bc* ad tertiam *x*. Cum enim prima *bc* sit ad tertiam *x* in ratione *duplicata* ipsius primæ *bc* ad secundam *dm* (§. 109), atque in hac eadem ratione primæ ad secundam sit triangulum *bac* ad triangulum *dem* (§. 342), patet propositum.

LEMMA III.

Circulus est polygonum regulare infinitorum laterum

350. Cum enim polygonum regulare eo magis ad circulum accedat, quo minora sunt, atque adeo numero plura ipsius latera, si hæc ponantur infinite parva, atque propterea numero infinita, polygonum minime a circulo discriminabitur.

COROLLARIUM.

351. Hinc *omnes circuli sunt polygona regularia ejusdem generis*; atque adeo *sunt omnes sibi mutuo similes* (§. 286).

THEO-

THEO EMA XIII.

Peripheriæ circulorum ſunt directe inter ſe, ut eorum radii.

352. Sint duo circuli EBD, *ebd* (*fig.* 30. 31. *Tab.* II.) quorum radii ſint rectæ AB, *ab*. Dico, peripheriam circuli EBD eſſe ad peripheriam circuli *ebd*, ut radius AB ad radium *ab*.

Demonſtratio.

Cum enim circuli EBD, *ebd* ſint polygona regularia ejuſdem generis (§. 351), eorum perimetri erunt, ut ipſorum radii AB, *ab* (§. 340).

COROLLARIUM I.

353. *Peripheriæ circulorum ſunt directe, ut ipſorum diametri*. Ratio quippe diametrorum a ratione radiorum diverſa non eſt (§. 94).

COROLLARIUM II.

354. *Arcus ſimiles duorum circulorum ſunt directe inter ſe, ut eorundem radii*. Sunt enim arcus ſimiles, ut integræ peripheriæ (§. 289).

THEO EMA XIV.

Circuli ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum.

355. Sint duo circuli EBD, *ebd* (*fig.* 30. 31. *Tab.* II.) eorumque radii rectæ AB, *ab*. Dico, circulum EBD eſſe ad circulum *ebd* in ratione *duplicata* radii AB ad radium *ab*.

Demonſtratio.

Circuli ſunt polygona regularia ejuſdem generis (§. 351).

Hæc

Hæc autem sunt inter se in ratione *duplicata* suorum radiorum (§. 347). Ergo &c.

COROLLARIUM I.

356. *Circuli sunt in ratione duplicata suarum diametrorum.* Diametri namque circulorum sunt, ut eorundem radii (§. 94)

COROLLARIUM II.

357. *Circuli sunt inter se, ut quadrata suorum radiorum, & diametrorum*: Sunt enim etiam hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* suorum laterum (§. 345); adeoque ipsorum radiorum, & diametrorum.

COROLLARIUM III.

358. *Tam semicirculi, quam sectores similes sunt in ratione duplicata radiorum; atque adeo, ut eorundem quadrata.* Semicirculi namque, & sectores similes sunt, ut integri circuli (§. 289).

COROLLARIUM IV.

359. *Si fuerint tres rectæ continuo geometrice proportionales, circulus descriptus circa primam est ad circulum descriptum circa secundam, ut prima ad tertiam.* Ostenditur eodem modo, quo §. 349. de *figuris planis rectilineis* idipsum demonstravimus.

COROLLARIUM V.

360. *Circulorum diametri, & semidiametri sunt in ratione ipsorum circulorum subduplicata* (§. 57).

SE-

SECTIO QUARTA.

De solidis.

DEFINITIO I.

361. *Solidum, sive corpus Mathematicum, est magnitudo secundum trinam dimensionem extensa, una vel pluribus superficiebus terminata.* Sicuti ergo puncta sunt extrema linearum, & lineæ superficierum, ita superficies sunt extrema corporum.

DEFINITIO II.

362. *Angulus solidus dicitur ille, qui tribus ad minimum angulis planis a quatuor rectis, si simul sumantur, deficientibus; penes duo latera simul unitis, eorumque apicibus in eodem puncto consistentibus, continetur.* Sic solidus est angulus, quem in puncto *a* (*fig.* 1. *Tab.* III.) constituunt tres anguli plani *bac*, *bad*, *dac*, minores quatuor rectis simul penes eorum latera uniti.

COROLLARIUM.

363. *Illi idcirco anguli solidi erunt inter se æquales, qui planis angulis numero, & magnitudine æqualibus, eodemque ordine dispositis, continentur.* Æquales nimirum erunt anguli solidi constituti ad puncta *a*, A (*fig.* 1. 2. *Tab.* III.) si non solum tres fuerint anguli plani, qui utrumque constituunt, verum etiam si ita inter se sese habuerint, ut angulus *bac* sit æqualis angulo BAC, angulus *bad* angulo BAD, & angulus *dac* angulo DAC.

DEFINITIO III.

364. *Ille angulus solidus vocatur rectus, qui tribus rectis angu-*

angulus planis comprehenditur. Hujusmodi est angulus constitutus in puncto *a* (*fig.* 3. *Tab.* III.) a tribus planis rectis angulis *eac*, *bac*, *bae*. *Angulus obtusus est ille, qui rectum superat. Acutus vero, qui a recto deficit*.

COROLLARIUM.

365. Hinc *omnes anguli solidi recti sunt inter se æquales*. omnes enim continentur angulis planis numero, & magnitudine æqualibus.

DEFINITIO IV.

366. Ex solidis, quæ planis superficiebus terminantur, illa dicuntur *regularia*, *quæ planis regularibus, & æqualibus continentur, omnesque ipsorum anguli sunt inter se æquales*. Corpora regularia sunt *cubus*, *tetraedrum*, *octaedrum*, *dodecaedrum*, & *icosaedrum*. Verum inter omnia principem locum obtinet *sphæra*. Cetera autem corpora ab his diversa, *irregularia* nuncupantur.

DEFINITIO V.

367. *Pyramis est solidum terminatum pluribus, quam duobus, triangulis planis rectilineis, ea ratione simul penes duo quælibet ipsorum latera unitis, ut spatium undique claudant, eorum vertices in unum omnes punctum coeant, ipsorum vero bases figuram planam rectilineam constituant*. Tale est solidum BACD (*fig.* 2. *Tab.* III.) Tribus quippe triangulis planis BAC, BAD, DAC continetur, quorum bases BC, BD, DC figuram planam BDC constituunt. Figura ipsa BDC *basis* pyramidis dicitur; *vertex* punctum A; *axis* vero recta ducta a *vertice* A in centrum *basis*. Si *axis* ad perpendiculum *basi* incumbat, pyramis *recta* vocatur; *inclinata* vero, si *axis* oblique ad *basim* se habeat. Ceterum *tot triangulis planis rectilineis quævis pyramis comprehenditur, quot latera in illius base numerantur*.

Hypo-

Hypothesis I.

368. Oriri concipitur pyramis ex parallela elevatione figuræ planæ rectilineæ continuo uniformiter decrescentis in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis. Ut si triangulum planum rectilineum BDC (*fig.* 2. *Tab.* III.) ita supra planum elevari intelligatur, ut in ejusmodi elevatione sibi semper parallelum existat, continuo uniformiter decrescat, & quidem in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, pyramis consurget BACD. *Demonstratur lib.* XI. *Elementorum* §. 95.

COROLLARIUM.

369. Hinc *consurgit pyramis ex tot planis rectilineis basi similibus, sibi mutuo atque basi parallelis, in ratione duplicata imminutæ altitudinis continuo uniformiter apicem versus decrescentibus, quot sunt puncta in illius altitudine.* Ut si in pyramide BACD determinentur plana elementaria *bdc*, *mxn*, hæc erunt similia, & parallela tum inter se, tum basi BDC, eritque basis BDC ad planum elementare *mxn* in ratione *duplicata* altitudinis AN totius pyramidis ad altitudinem Ay respondentem elemento *mxn*. Similiter basis BDC erit ad planum elementare *bdc* in ratione *duplicata* altitudinis AN ad altitudinem Az. Hæ porro plana elementaria tot sunt, quot habentur puncta in altitudine AN, non considerato vertice A. Toties etiam debet sumi planum generans in ortu pyramidis, quot in altitudine puncta numerantur.

DEFINITIO VI.

370. *Prisma est solidum pluribus planis rectilineis comprehensum, quorum duo ex adverso æqualia sunt, similia, & parallela, reliqua vero sunt parallelogramma.* Hujusmodi est solidum *az* (*fig.* 4. Tab. III.) quippe plana ex adverso posita *abc*, *def* æqualia sunt, similia, & parallela; reliqua vero

adeò

adeb, *befc*, *adfc* sunt parallelogramma. Clauditur idcirco *prisma* tot parallelogrammis, quot sunt latera in uno planorum, quæ sunt sibi ex adverso posita.

Hypothesis II.

371. Oritur prisma ex parallela elevatione figuræ planæ rectilineæ, quam elevationem altitudo ipsius prismatis metitur. Sic prisma *af* (*fig.* 4. *Tab.* III.) consurgit ex parallela elevatione plani rectilinei *def*, quam elevationem metitur altitudo *cx* ipsius prismatis.

COROLLARIUM.

372. Concipi idcirco potest *prisma* veluti compositum ex tot planis rectilineis, sibi mutuo impositis, adeoque inter se parallelis, similibus, & æqualibus, quot sunt puncta in illius altitudine. Quocirca potest *prisma* quodcunque assumi, veluti factum ex ductu basis in altitudinem. Ut si basis *def* prismatis *af* (*fig* 4. *Tab.* III.) fuerit $= mn$, ejusque altitudo $cx = x$, prisma *af* erit $= mnx$. *Demonstrantur hæc omnia lib. XI. Elementorum* §. 74. *& seq.*

DEFINITIO VII.

373. *Parallelepipedum est solidum sex parallelogrammis comprehensum, quorum duo qualibet ex adverso similia sibi mutuo sunt, æqualia, & parallela.* Hujusmodi est solidum *bd* (*fig.* 3. *Tab.* III.)

COROLLARIUM.

374. Hinc *omne parallelepipedum est prisma, licet non omne prisma sit parallelepipedum.* Quippe in omni *parallepipedo* duo plana posita ex adverso sunt similia, æqualia, & parallela, prout *prisma* exigit. Verum, cum hæc in *parallelepipedo* debeant esse parallelogramma, quod non postulat

pris-

prisma, non omne *prisma* est *parallelepipedum*.

DEFINITIO VIII.

375. *Cubus est solidum sex quadratis æqualibus, & quæ ex adverso sunt, sibi mutuo parallelis comprehensum*. Tale est solidum *acd* (*fig*. 6. *Tab*. III.)

COROLLARIUM I.

376. Cum omnes anguli *cubi* sint recti (§. 364), adeoque æquales inter se (§. 365) *omnis cubus est solidum regulare* (§. 366).

COROLLARIUM II.

377. *Omnis cubus est parallelepipedum*; at non vicissim *omne parallelepipedum est cubus*. Omni siquidem *cubo* convenit definitio *parallelepipedi*; at non e converso. *Cubus* itaque *est species prismatis* (§. 374).

DEFINITIO IX.

378. *Conus est solidum contentum circulo, tamquam base, & curva superficie ex una parte in punctum*, quod *coni apex* dicitur, *tota desinente*. Tale est solidum BAC (*fig*. 7. T. III.) *Axis porro coni est recta ducta ab illius apice, seu vertice in centrum basis*. Sic recta A*a* est axis coni BAC, quæ si perpendicularis fuerit basi, *conus* dicitur *rectus*; si vero oblique ad basim se habuerit, *conus obliquus* nuncupatur.

DEFINITIO X.

379. *Cylindrus est solidum duobus circulis æqualibus, & parallelis, & curva superficie in illorum peripherias desinente comprehensum*. Hujusmodi est solidum *ad* (*fig*. 8. *Tab*. III.) Continetur enim duobus circulis æqualibus, & parallelis *ab*, *cd*,

&

& curva superficie *acdb*. Recta porro *en* conjungens centra circulorum dicitur *axis coni*, quæ si ad perpendiculum basi institerit, *conus* vocatur *rectus*; *obliquus* vero, si fuerit inclinata.

DEFINITIO XI.

380. *Tetraedrum est solidum quatuor triangulis planis rectilineis regularibus, & inter se æqualibus terminatum*, ut solidum ABC (*fig.* 9. *Tab.* III.). *Octaedrum est solidum octo triangulis planis rectilineis regularibus, & inter se æqualibus comprehensum*, ut solidum DEF (*fig.* 10). *Dodecaedrum est solidum, quod duodecim pentagonis æqualibus, & regularibus continetur*, ut solidum GHK (*fig.* 11). *Icosaedrum* postremo *est solidum, quod viginti triangulis planis rectilineis, regularibus, & æqualibus comprehenditur*, ut solidum LMN (*fig.* 12). Universaliter, *polyedrum vocatur illud solidum quod pluribus figuris planis rectilineis terminatur*. Est enim *polyedrum* in genere solidorum, quod est *polygonum* in genere planorum.

DEFINITIO XII.

381. *Sphæra est solidum una tantum curva superficie comprehensum, in cujus area punctum est, a quo omnes rectæ, quæ in illam curvam superficiem cadunt, sunt inter se æquales.* Hujusmodi est solidum *bcd* (*fig.* 13. *Tab.* III.) Æquales quippe sunt omnes rectæ *ab*, *ac*, *ad*, quæ a puncto *a* in curvam superficiem *bcd*, qua solidum ipsum continetur, duci possunt.

DEFINITIO XIII.

382. *Centrum sphæræ est illud punctum sumtum in area ipsius sphæræ, a quo omnes rectæ ductæ in ejusdem superficiem, sunt æquales.* Radius, *sive semidiameter sphæræ est quævis recta ducta a centro in superficiem. Diameter vero est recta transiens per sphæræ centrum, & utrinque ad illius superficiem terminata.* Sic punctum *a* est *centrum* sphæræ *bcd* (*fig.* 13. *Tab.* III.); cum sphæ-

rectæ *ab*, *ac*, *ad* sint æquales. *Radius* est quælibet rectarum *ab*, *ac*, *ad*. *Diameter* vero est recta *bd*.

COROLLARIUM.

383. Hinc *omnes sphæræ radii æquales sunt inter se*, *sicuti etiam omnes ejusdem diametri*. Et quoniam centrum in medio sphæræ, ut patet, reperitur, *planum per sphæræ centrum transiens*, *eam in duas partes æquales dividit*, quæ *hemisphæria* idcirco nuncupantur.

DEFINITIO XIV.

384. *Centrum polyedri regularis est punctum sumtum in illius area*, *a quo omnes rectæ ductæ ad singulos ipsius polyedri angulos*, *sunt æquales*. Sic punctum *a* est centrum *polyedri regularis* LMN (*fig.* 12. *Tab.* III.). Quippe omnes rectæ ductæ a puncto *a* ad singulos ipsius angulos *c*, *e*, *x*, *b* &c. sunt æquales. Cum enim cuilibet *polyedro regulari* sphæra circumscribi possit, cujus superficies per apices omnium angulorum ipsius *polyedri* simul transeat, manifeste apparet, ejusmodi punctum in quolibet *polyedro regulari* reperiri,

DEFINITIO XV.

385. *Radius polyedri regularis est recta quævis linea ducta ab illius centro ad apicem angulorum ipsius polyedri*. Sic recta *ab* est radius *polyedri regularis* LMN (*fig.* 12. *Tab.* III),

DEFINITIO XVI.

386. *Solida similia dicuntur illa*, *quæ totidem ex æquo planis*, *sibique mutuo similibus continentur*. Sic duo prismata NBCD, *nbcd* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) similia sunt sibi mutuo; quia tot planis continetur prisma NBCD, quot prisma *nbcd* comprehenditur; & plana unius similia sunt

planis alterius, videlicet planum BCD plano *bcd*, planum ACDZ plano *acdz*, atque ita de ceteris.

COROLLARIUM I.

387. Hinc *omnia corpora regularia*, nimirum *omnes cubi, omnia tetraedra, octaedra, dodecaedra, & icosaedra, sunt* respective *sibi mutuo similia*. Etenim planis numero æqualibus, & figura similibus, utpote regularibus, omnia *respective* continentur.

COROLLARIUM II.

388. *Quodlibet latus solidi regularis est homologum cuilibet lateri alterius solidi regularis ejusdem generis*. Omnia enim solida regularia planis regularibus continentur; & singula latera unius figuræ rectilineæ regularis sunt homologa singulis lateribus alterius figuræ ejusdem generis (§. 287).

DEFINITIO XVII.

389. *Duo cylindri*, sicuti etiam *duo coni*, *dicuntur similes*, *quorum axes eandem ad circulos basium inclinationem habent, eandem vero rationem ad eorundem circulorum radios*. Ut si eadem fuerit inclinatio axium AN, *an* cylindrorum DC, *dc* (*fig.* 16. 17. *Tab.* III.) ad circulos basium BC, *bc*, videlicet si anguli ANC, *anc* fuerint æquales; sique ratio axis AN ad radium NC circuli baseos BC diversa ab ea non fuerit, quam habet axis *an* ad radium *nc* circuli baseos *bc*, duo cylindri DC, *dc* dicentur *similes*. Idipsum intellige de conis BAC, *bac*.

AXIOMA.

390. *Illæ magnitudines sunt æquales, quarum elementa sunt numero, & quantitate* respective *inter se æqualia*.

LEM-

LEMMA I.

Cylindrus est prisma infinitorum laterum.

391. Spectetur prisma *me* (*fig.* 18. *Tab.* III.), cujus basis *abcde* sit polygonum regulare. Evidens est, multiplicari non posse latera polygoni baseos, eodem manente perimetro, quin itidem multiplicentur parallelogramma, quibus prisma *me* continetur; ut proinde, si latera baseos sint infinita, & infinite parva, parallelogramma itidem, quibus prisma continetur, evadant numero infinita, & infinitæ parvæ latitudinis. Constat autem, latera polygoni *abcde* in infinitum multiplicari non posse, quin illius perimeter in peripheriam circuli *xz* abeat. Ergo neque parallelogramma, quibus terminatur prisma *me*, in infinitum multiplicari queunt, eorumque latitudo in infinitum decrescere, quin prismatis superficies abeat itidem in curvam superficiem cylindri *mxz*; atque adeo quin prisma in cylindrum mutetur. Ergo cylindrus non differt a prismate infinitorum laterum.

COROLLARIUM I.

392. *Cylindrica idcirco superficies assumi potest, veluti composita ex infinitis parallelogrammis infinitæ parvæ latitudinis, penes duo ipsorum latera simul unitis.*

COROLLARIUM II.

393. *Cylindri similes considerari possunt veluti species prismatum similium.*

LEMMA II.

Conus est pyramis infinitorum laterum.

394. Haud dissimilis est a præcedenti. Sicuti namque po-

lygonum regulare *bcd* (*fig.* 19. *Tab.* III.) sive basis pyramidis *bad*, abit in peripheriam circuli, si in infinitum multiplicentur ipsius latera, ita superficies pyramidis abit tunc in curvam superficiem coni; ac proinde ipsa pyramis in conum transit, seu a cono nullatenus discerni potest; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

395. *Considerari propterea potest superficies coni veluti composita ex infinitis triangulis, basim infinite parvam habentibus, penes duo ipsorum latera simul unitis.*

COROLLARIUM II.

396. *Coni similes sumi, atque spectari queunt, veluti species pyramidum similium.*

THEOREMA I.

Pyramides aequalium basium, & altitudinum sunt aequales.

397. Æquales sint bases *bdc*, BDC (*fig.* 1. 2. *Tab.* III.), sicuti etiam altitudines *an*, AN pyramidum *abd*, ABD. Dico, ipsas quoque pyramides esse æquales.

Demonstratio.

Enimvero, cum altitudines *an*, AN sint æquales, elementa utriusque pyramidis erunt numero æqualia (§. *369*). Æqualia sunt autem etiam magnitudine, si *respective* sumantur. Nam spectentur duo elementa MAP, *mxn* ad æqualem altitudinem A*y*. Cum igitur elementa pyramidis decrescant in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis (§. *368*) basis *bdc* pyramidis *adc* erit ad elementum MAP, ut basis BDC pyramidis ABD ad elementum *mxn*, quod scilicet utrumque antecedens sit ad suum consequens in ratione *duplicata* altitudinis AN, sive *an*, ad altitudinem A*y*, sive *ay*.

Ba-

Bases autem *bdc*, BDC positæ sunt æquales. Ergo etiam ipsa elementa MAP, *mxn* erunt æqualia (§. 70). Igitur duæ pyramides *abd*, ABD sunt æquales (§. 390)

COROLLARIUM.

398. *Coni æqualium basium, & altitudinum sunt æquales.* Conus enim est species pyramidis (§. 394).

THEOREMA II.

Omnis pyramis est tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis.

I.

399. Spectetur primo prisma BE (*fig.* 20. *Tab.* III.) trilateram habens basim DEF, sitque basis *def* pyramidis *ae* (*fig.* 2. *Tab.* III.) æqualis basi DEF ipsius prismatis, & eadem utriusque altitudo *ab*. Dico, pyramidem *ae* esse tertiam partem prismatis BE.

Demonstratio.

Prisma BE secetur plano transeunte per punctum A, & per puncta D, F, sive per latus DF basis DEF. Habebitur pyramis DAFE, quæ, utpote æqualem cum pyramide *adf* habens basim, & altitudinem, erit ipsi pyramidi *adf* æqualis (§. 397). Residuum vero solidum secetur plano transeunte per latus BA plani BAC, & per punctum F. Itaque prisma BE divisum erit in tres pyramides DAFE, FBAC, DABF; quæ sunt omnes inter se æquales. Enimvero, cum diagonalis BF dividat parallelogrammum BDFC in duo triangula æqualia DBF, BFC (§. 227), pyramides FBAC, DABF habebunt æquales bases. Habent autem etiam æqualem altitudinem; cum altitudo utriusque non differat a recta ducta a vertice A in planum BDFC. Ergo

duæ istæ pyramides sunt æquales (§. 397). Rursus, cum plana terminantia DEF, BAC sint æqualia (§. 370), pyramides DAFE, BFAC habebunt æquales bases. Æquales sunt autem etiam ipsarum altitudines, rectæ nimirum AE, CF. Ergo etiam duæ pyramides DAFE, BFAC sunt æquales (§. 397); ac proinde æquales sunt tres pyramides DAFE, FBC, DABF (§. 24). Ostensum est autem, pyramidem *adef* æquare pyramidem DAFE. Ergo pyramis *adef* est tertia pars prismatis BE.

II.

400. Sit modo prisma BN (*fig.* 22. *Tab.* III.) pentagonam habens basim MNRPF, quæ similis sit, & æqualis basi *dabce* pyramidis *cad* (*fig.* 23. *Tab.* III.) ejusdem altitudinis. Dico, pyramidem *cad* esse tertiam partem prismatis BN.

Demonstratio.

Cum plana AEDB, MNRF similia sint, æqualia, & parallela (§. 370), prisma BN sectum erit planis BENF, CEMP in tria prismata. Similiter secta pyramide plano transeunte per verticem *a*, & per puncta *b*, *e*, & plano transeunte per verticem *a*, & per puncta *e*, *n*, tres habebuntur pyramides, quarum *caeb* erit tertia pars prismatis BENFMA, pyramis *baen* erit tertia pars prismatis BFNECP, & pyramis *eand* tertia pars prismatis CENPRD (§. 399), ob *respectivam* scilicet æqualitatem basium, & altitudinum. Ergo tota pyramis *cae* est tertia pars totius prismatis BN (§. 101); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

401. Cum cylindrus sit species prismatis (§. 391); & conus species pyramidis (§. 394), *omnis conus erit tertia pars cylindri ejusdem basis, & altitudinis.*

Co-

COROLLARIUM II.

402. *Pyramides sunt directe inter se, ut prismata æqualis basis, & altitudinis.* Nimirum pyramis BADC(*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) est ad pyramidem *badc*, ut prisma NC ad prisma *nc* (*§.* 94).

COROLLARIUM III.

403. Haud dissimili ratione etiam coni BAC, *bac sunt directe, ut cylindri* DC, *dc æquales bases respective cum illis habentes, & altitudines* (*fig.* 16. 17. *Tab.* III.)

THEOREMA III.

Prismata æqualium basium & altitudinum sunt æqualia.

404. Sint duo prismata *ae*, AE, (*Fig.* 4. 5. *Tab.* III.) quarum bases *def*, DEF æquales sint inter se, sicuti etiam altitudines *ez*, CZ. Dico, ipsa prismata esse æqualia:

Demonstratio.

Cum enim prisma *ae* consurgat ex ductu basis *def* in altitudinem *ez*, & prisma AE ex ductu basis DEF in altitudinem CZ (§. 372), nequeunt bases, & altitudines esse *respective* inter se æquales, quin ipsa itidem producta, sive prismata, sint æqualia (*§.* 68).

COROLLARIUM.

405. *Cylindri æqualium basium & altitudinum sunt æquales.* Sunt enim species prismatum (§. 391).

THEOREMA IV.

Prismata æqualium altitudinum sunt, ut bases; & quæ habent æquales bases, sunt, ut altitudines.

I.

406. Sint duo prismata *ae*, AE (*fig.* 4. 5. *Tab.* III.) æqualium altitudinum. Dico, prisma *ae* esse ad prisma AE, ut est basis *def* ad basim DEF.

Demonstratio.

Ponatur basis $def = xr$, & basis $DEF = yu$, altitudo vero cx, adeoque etiam $CZ, = m$. Erit ergo prisma $ae = xrm$, & prisma $AE = yum$ (§. 372). Est autem $xrm . yum = xr . yu$ (§. 77). Ergo etiam prisma *ae* erit ad prisma AE, ut *xr* ad *yu*, nimirum ut bases,

II.

407. Vicissim vero æquales sint bases prismatum *ae*, AE. Dico, prisma *ae* esse ad prisma AE, ut est altitudo *cx* ad altitudinem CZ.

Demonstratio.

Eadem est cum præcedenti.

COROLLARIUM I.

408. *Pyramides æque altæ sunt directe, ut bases; & quæ habent bases æquales, sunt, ut altitudines* (§. 402).

COROLLARIUM II.

409. *Cylindri æqualium altitudinum sunt, ut bases; & qui ha-*

habent æquales bases, sunt, ut altitudines (§. 391).

COROLLARIUM III.

410. *Coni æque alti sunt directe, ut circuli basium*; & vicissim *coni æqualium basium, sunt, ut altitudines* (§. 403).

THEOREMA V.

Prismata inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium & altitudinum.

411. Super inæquales bases BCD, *bcd*, & sub inæqualibus altitudinibus MX, *mx* constituta sint duo prismata MBC, *mbc* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.). Dico, prisma MBC esse ad prisma *mbc* in ratione composita ex ratione basis BCD ad basim *bcd*, & ex ratione altitudinis MX ad altitudinem *mx*.

Demonstratio.

Facta namque hypothesi, ut sit basis BCD $=pr$, basis $bcd=qr$, altitudo MX $=n$, & altitudo $mx=u$, erit prisma MBC $=prn$, & prisma $mbc=qru$ (§. 372). Productum autem prn est ad productum qru in ratione composita ex ratione magnitudinis pr ad magnitudinum qr, & ex ratione magnitudinis n ad magnitudinem u (§. 107). Ergo in eadem ratione erunt etiam ipsa prismata; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

412. *Pyramides inæqualium basium & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum* (§. 402).

COROLLARIUM.

413. *Cylindri inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum* (§. 391).

Co-

COROLLARIUM III.

414. *Coni inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum* (§. 403).

THEOREMA VI.

Prismata reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æqualia.

415. Basis CBD (*fig.* 24. 25 *Tab.* III.) prismatis AC sit ad basim *cbd* prismatis *ac reciproce*, ut altitudo *ab* ad altitudinem AB. Dico, prismata AC, *ac* esse æqualia.

Demonstratio.

Ponatur basis CBD $= pr$, basis $cbd = qz$, altitudo $ab = x$, & altitudo AB $= y$. Cum igitur ex hypothesi habeatur. $pr.qz = x.y$, erit $pry = qzx$ (§. 73). Prisma autem AC adæquat productum pry, & prisma *ac* productum qzx (§. 372). Ergo erit AC $=$ *ac* (§. 24).

COROLLARIUM I.

416. *Pyramides reciprocantes sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æquales* (§. 402).

COROLLARIUM II.

417. *Cylindri, qui reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æquales* (§. 391).

COROLLARIUM III.

418. *Coni reciprocantes sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æquales* (§. 403).

SCHO-

SCHOLION.

419. Cum parallelepipedum sit species prismatis (§. 374), quæ de prismatibus modo ostensa sunt, sequitur aperte, ea omnia etiam parallelepipedis convenire.

THEOREMA VII.

Omnia latera homologa planorum, quibus similia solida terminantur, eandem inter se rationem habent.

420. Sint duo solida similia DC, *dc* (*fig.* 26. 27. *Tab.* III.) Latera autem homologa planorum, quibus continentur, sint DB, *db*, BE, *be*, BC, *bc* &c. Dico, horum omnium eandem esse rationem.

Demonstratio.

Cum enim sit BD . *bd* = BN . *bn* (§. 320), & idem latus BN sit commune duobus planis EBN, NBD, sitque BE . *be* = BN . *bn* (§. 320), erit quoque BD . *bd* = BE . *be* (§. 25), & eadem ratione etiam BD . *bd* = BC . *bc*, atque ita de ceteris. Ergo &c.

THEOREMA VIII.

Altitudines prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint duo plana ipsorum similia, sunt, ut duo qualibet homologa basium latera.

I.

421. Super plana similia BCD, *bcd* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) veluti Bases, habeantur duo prismata similia NC, *nc* illis ad perpendiculum insistentia, & duo itidem similia ad ipsas bases similiter inclinata MC, *mc*, quorum altitudines sint rectæ MX, *mx*. Dico, horum prismatum altitudines esse

esse *directe* inter se, ut duo quælibet homologa latera CD, *cd* basium BCD, *bcd*.

Demonstratio.

Cum altitudines prismatum NC, *nc* basibus ad perpendiculum insistentium non differant a lateribus homologa ZD, *zd* planorum similium ACDZ, *acdz*; sintque lateris ZD, *zd directe*, ut latera CD, *cd* (§. 420), remanet, altitudines prismatum NC, *nc* esse *directe*, ut latera CD, *cd*. Quoniam vero altitudines MX, *mx* prismatum inclinatorum MC, *mc* adæquant latera homologa ZD, *zd* prismatum similium NC, *nc* ad perpendiculum super easdem bases erectorum, sicuti, ut modo ostensum est, habetur ZD. *zd* = CD. *cd*, ita habebitur etiam MX. *mx* = CD. *cd*; adeoque &c.

II.

422. Sint duæ pyramides similes BEDC, *bedc* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) quarum bases sint plana similia BCD, *bcd*. Dico, earum altitudines MX, *mx* esse directe, ut latera homologa CD, *cd* basium.

Demonstratio.

Erectis enim super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus, duobus prismatibus similibus MC, *mc*, evidens est, altitudines MX, *mx*, si referantur ad prismata ipsa MC, *mc*, esse, ut latera homologa CD, *cd* basium earundem BCD, *bcd* (§. 420). Ergo hæc itidem est earundem altitudinum ratio, si ad pyramides BEDC, *bedc* altitudines ipsæ referantur.

COROLLARIUM I.

423. Cum plana similia BCD, *bcd* sint in ratione *duplicata* laterum homologorum CD, *cd* (§. 342), *bases prismatum*,

tum, & pyramidum similium, si sint plana eorundem similia, erunt in ratione duplicata altitudinum.

COROLLARIUM II.

424. *Altitudines prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint plana similia, sunt directe, ut perimetri basium.* Altitudines nimirum MX, *mx* (*fig.* 14. 15. *Tab.* III.) tam prismatum MC, *mc*, quam pyramidum BEDC, *bedc* similium, sunt *directe* inter se, ut perimetri basium BCD, *bcd*. Sunt enim perimetri BCD, *bcd*, ut duo latera eorundem homologa CD, *cd* (§. 339).

COROLLARIUM III.

425. Hinc, quoniam cylindri similes sunt species prismatum similium (§. 393), & coni similes sunt species pyramidum similium (§. 396), *altitudines tam cylindrorum, quam conorum similium erunt directe inter se, ut peripheriæ circulorum basis*; cumque peripheriæ sint, ut radii (§. 352), *altitudines horum solidorum erunt itidem directe inter se, ut radii circulorum basis.*

Hypothesis III.

426. *Si ex centro polyedrorum regularium ejusdem generis ad singulos ipsorum angulos ducantur radii, in totidem ex æquo pyramides sibi mutuo similes ipsa polyedra divisa erunt.* Ut si planum BCD (*fig.* 1. 2. *Tab.* IV.) fuerit unum ex illis, quibus terminatur polyedrum regulare EB, & planum *bcd* unum ex illis, quibus polyedrum regulare *eb* ejusdem generis comprehenditur, ductis a centro A ad angulos B, C, D radiis AB, AC, AD, & a centro *a* ad angulos *b*, *c*, *d* radiis *ab*, *ac*, *ad*, pyramidis BADC erit similis pyramidi *badc*. Idipsum dicito de ceteris pyramidibus, quæ super alia plana eodem modo determinantur. *Demonstratur lib. XIII. Elemen-*

mentorum §. 97. Verum colligi fatis id etiam poffe videtur ex §. 337. Sicuti enim duo quælibet polygona regularia ejufdem generis, radiis ex ipforum centro ad fingulos eorundem angulos ductis, refolvuntur in totidem ex æquo fimilia triangula, quot funt ipforum latera, ita duo polyedra regularia ejufdem generis videntur debere refolvi in totidem ex æquo pyramides fimiles, quot funt ipforum plana terminantia, fi ex eorum itidem centro ad fingulos angulos rectæ ducantur. Eft enim polyedrum regulare inter figuras folidas, quod eft regulare polygonum inter planas. Hinc

COROLLARIUM.

427. *Radii polyedrorum regularium ejufdem generis funt directe inter fe, ut duo quælibet latera homologa planorum, quibus terminantur.* Sic radii AB, *ab* polyedrorum regularium ejufdem generis EB, *eb* (*fig.* 1. 2. *Tab.* IV.) funt *directe*, ut duo latera homologa BD, *bd* terminantium planorum BCD, *bcd*. Etenim, cum tam radii AB, *ab*, quam rectæ BD, *bd* fint latera homologa pyramidum fimilium BADC, *badc*, erit AB. *ab* = BD. *bd* (§. 420).

THEOREMA IX.

Superficies omnium folidorum fimilium, quæ planis rectilineis terminantur, funt in ratione duplicata duorum homologorum eorundem laterum.

428. Sint duo folida DC, *dc* fimilia (*fig.* 26. 27. *Tab.* III.) planis rectilineis terminata. Dico, fuperficiem folidi DC effe ad fuperficiem folidi *dc* in ratione *duplicata* lateris BC ad latus homologum *bc*.

Demonftratio.

Cum omnia plana fimilia, quibus ipfa folida continentur, fint

sint ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (§. 342); eademque sit ratio omnium laterum homologorum solidorum similium (§. 420), duo quælibet plana similia solidorum DC, *dc* erunt in ratione *duplicata* laterum homologorum BC, *bc*. Igitur etiam summa planorum terminantium solidum DC, sive tota superficies ipsius solidi DC, erit a summam omnium planorum terminantium solidum *dc*, seu ad totam superficiem ipsius solidi *dc*, in ratione *duplicata* lateris BC ad latus homologum *bc* (§. 101).

COROLLARIUM I.

429. *Superficies solidorum similium, quæ planis terminantur, sunt directe inter se, ut quadrata duorum quorumcunque laterum homologorum*. Nimirum superficies solidi DC est ad superficiem solidi *dc*, ut quadratum lateris CB ad quadratum lateris homologi *cb*. Sunt enim etiam hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* ipsorum laterum CB, *cb* (§. 345).

COROLLARIUM II.

430. *Superficies prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint plana similia, sunt in ratione duplicata suarum altitudinum*. Horum namque altitudines sunt *directe* inter se, ut duo quælibet homologa ipsorum latera (§§. 421, 422).

COROLLARIUM III.

431. Hinc, cum cylindri similes sint species prismatum similium (§. 393), & similes coni sint species similium pyramidum (§. 396), *curvæ tam cylindrorum, quam conorum similium superficies sunt* respective *inter se in ratione duplicata suarum altitudinum*; atque hinc

COROLLARIUM IV.

432. Cum altitudines cylindrorum, & conorum similium sint,

ſint, ut radii circulorum baſis (§. 425), *curva ſuperficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt* reſpective *in ratione duplicata radiorum circulorum baſis*; ac proinde, *ut ipſorum radiorum quadrata* (§. 357); nec non, *ut ipſi baſium circuli* (§. 355).

SCHOLION.

433. Cum circuli, quibus ſimiles cylindri terminantur, quique ſunt ſimilium conorum baſes, ſunt in ratione *duplicata* ſuorum radiorum (§. 355), *curva ſimilium cylindrorum, atque conorum ſuperficies, ſumta una cum eorundem circulis, ſunt in ratione radiorum circulorum baſis duplicata*.

COROLLARIUM V.

434. *Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum*. Nimirum ſuperficies polyedri regularis DC eſt ad ſuperficiem poleydri regularis ejuſdem generis *dc* (*fig.* 26. 27. *Tab.* III.) in ratione *duplicata* radii AB ad radium *ab*. Hujuſmodi namque polyedra ſunt ſolida ſimilia (§. 387), eorumque radii ſunt *directe* inter ſe ut duo quælibet homologa ipſorum latera (§. 427).

COROLLARIUM VI.

435. *Superficies* idcirco *polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut ſuorum radiorum quadrata* (§. 345).

COROLLARIUM VII.

436. Viciſſim vero *altitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia; ſicuti etiam altitudines ſimilium cylindrorum, & conorum; radii quoque circulorum baſis eorundem; nec non radii polyedrorum regularium ejuſdem generis, ſunt inter ſe in ratione* ſubduplicata *ſuperficierum ipſorum ſolidorum* reſpective (§. 57)

THEO-

THEOREMA X.

Prismata similia sunt in ratione triplicata suorum late um homologorum.

437. Sint duo prismata similia MBC,*mbc* (*fig.*14.15.*T.*III.) quorum bases sint plana similia BCD, *bcd*, & altitudines rectæ MX, *mx*. Dico, prisma MBC esse ad prisma *mbc* in ratione *triplicata* lateris CD ad latus homologum *cd*.

Demonstratio.

Prismata MBC, *mbc* sunt inter se in ratione composita ex ratione basium BCD, *bcd*, & ex ratione altitudinum MX, *mx* (§.411). Bases autem BCD, *bcd* sunt in ratione *duplicata* laterum CD, *cd* (§. 342); & altitudines MX, *mx* sunt *directe*, ut ipsa latera CD, *cd* (§. 421). Ergo prisma MBC est ad prisma *mbc* in ratione composita ex ratione laterum CD, *cd*, & ex eadem *duplicata*. Hæc autem est ratio ipsorum laterum CD, *cd triplicata* (§.54). Ergo prismata MBC, *mbc* sunt in ratione *triplicata* homologorum laterum CD, *cd*, adeoque &c.

COROLLARIUM I.

438. *Cubi sunt in ratione triplicata suorum laterum.* Cum enim cubus sit species prismatis (§. 377), & omnes cubi sint solida similia (§. 387), omnes cubi erunt similia prismata, & quidem hujusmodi, ut quodlibet latus unius sit homologum cuilibet lateri alterius (§.388); adeoque &c.

COROLLARIUM II.

439. *Prismata similia, quorum bases sint plana ipsorum similia, sunt in ratione triplicata suarum altitudinum.* Altitudines namque horum prismatum sunt, ut duo quælibet latera ipsorum homologa (§. 421).

K Co-

COROLLARIUM III.

440. *Pyramides similes, quarum bases sint plana ipsarum similia, sunt in ratione triplicata tum laterum homologorum, tum altitudinum.* Pyramides quippe sunt *directe* inter se, ut prismata super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 402), atque adeo pyramides similes sunt, ut prismata similia; ac proinde &c.

COROLLARIUM IV.

441. Cum cylindri similes sint species prismatum similium (§. 393), & similes coni sint species pyramidum similium (§. 396), *tam cylindri, quam coni similes sunt in ratione triplicata suarum altitudinum.*

COROLLARIUM V.

442. Cumque altitudines tam cylindrorum, quam conorum similium sint *directe* inter se, ut radii circulorum basis (§. 425), *tam cylindri, quam coni similes sunt directe inter se in ratione ipsorum radiorum triplicata*; atque hinc, *ut cubi tam ipsorum radiorum, quam suarum altitudinum* (§. 438).

COROLLARIUM VI.

443. *Si ratio laterum duorum cuborum continuetur usque ad quartum terminum, cubus erit ad cubum, ut illius latus ad quartum terminum.* Nimirum, positis quatuor rectis continuo geometrice proportionalibus AB, CD, E, F (*fig.* 3. 4. *Tab.* IV.) cubus MA primæ AB erit ad cubum NC secundæ CD, ut prima AB ad quartam F. Prima namque AB est ad quartam F in ratione *triplicata* ipsius primæ AB ad secundam CD (§. 109), quæ est etiam ratio ipsorum cuborum (§. 438).

SCHO-

SCHOLION.

444. Vides propterea, solutionem problematis de *duplicatione cubi*, quod adeo torsit Priscorum ingenia, ab inventione *duarum mediarum continuo proportionalium* unice dependere.

COROLLARIUM VII.

445. *Latera homologa prismatum, & pyramidum similium; altitudines quoque ipsorum, sicuti etiam conorum, & cylindrorum similium, nec non radii circulorum basis eorundem, sunt* respective *inter se in ratione ipsorum subtriplicata* (§.57).

Hypothesis IV.

446. *Polyedra similia in totidem ex æquo pyramides similes, quarum bases sint ipsorum plana terminantia, resolvi possunt.* Demonst. *lib. XIII. Elem.* §. 91. Ceterum haud obscure id etiam colligitur ex §.341. Cum enim polyedrum sit inter figuras solidas, quod est polygonum inter planas, quemadmodum duo quælibet polygona similia resolvi possunt in tot similia triangula, quot sunt ipsorum latera, ita duo quælibet similia polyedra videntur resolubilia in tot similes pyramides, quot sunt plana, quibus polyedra ipsa terminantur.

THEOREMA XI.

Polyedra similia sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum.

447. Sint duo polyedra similia EB, *eb* (*fig.* 1. 2. *Tab.* IV). Dico, polyedrum EB esse ad polyedrum *eb* in ratione *triplicata* lateris BD ad latus homologum *bd*.

Demonstratio.

Pyramis BADC sit una ex illis, ex quibus componitur polyedrum EB, & pyramis *badc* una ex illis, ex quibus componitur polyedrum *eb*; sintque pyramides ipsæ similes inter se. Erit ergo pyramis BADC ad pyramidem *badc* in ratione *triplicata* lateris BD ad latus homologum *bd* (§. 440). Duæ autem quælibet pyramides similes, in quas polyedra ipsa resolvi possunt, hanc eandem habent rationem inter se; eademque est ratio omnium laterum homologorum in polyedris similibus (§. 420). Ergo summa omnium pyramidum constituentium polyedrum EB erit ad summam earum omnium, quæ polyedrum *eb* constituunt, sive soliditas polyedri EB erit ad soliditatem polyedri *eb*, ut illarum una BADC ad unam *badc* (§. 101); atque adeo in ratione *triplicata* lateris BD ad latus homologum *bd*; ac proinde &c.

COROLLARIUM I.

448. *Polyedra regularia ejusdem generis sunt in ratione triplicata suorum laterum*. Sunt enim similia (§. 387), & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§. 388). Hinc

COROLLARIUM II.

449. Cum ratio radiorum in polyedris regularibus ejusdem generis non sit diversa a ratione laterum eorundem (§. 427), *polyedra regularia ejusdem generis sunt in ratione suorum radiorum triplicata; atque adeo, ut eorundem cubi* (§. 438).

COROLLARIUM III.

450. Hinc vicissim *latera homologa polyedrorum similium, & radii polyedrorum regularium ejusdem generis, sunt in ratione ipsorum subtriplicata* (§. 57).

LEM-

LEMMA III.

Sphæra est polyedrum regulare infinitis planis, magnitudine infinite parvis comprehensum.

451. Manifeste siquidem constat, polyedrum magis ad sphæram accedere, quo numero plura, & magnitudine exiliora sint plana, quibus continetur; ut proinde polyedrum infinitis numero planis, magnitudine infinite parvis comprehensum, nullatenus a sphæra discerni queat. Ergo sphæra merito optimoque jure spectari atque assumi potest, veluti species polyedri regularis.

COROLLARIUM.

452. *Omnes idcirco sphæræ sunt polyedra regularia ejusdem generis; ac proinde sunt omnes sibi mutuo similes* (§. 387).

THEOREMA XII.

Sphærarum superficies sunt in ratione duplicata suorum radiorum.

453. Rectæ AB, *ab* (*fig.* 5. 6. *Tab.* IV.) sint radii sphærarum CB, *cb*. Dico, superficiem sphæræ CB esse ad superficiem sphæræ *cb* in ratione *duplicata* radii AB ad radium *ab*.

Demonstratio.

Sphæræ CB, *cb* sunt polyedra regularia ejusdem generis (§. 452). Ergo earum superficies sunt in ratione radiorum AB, *ab duplicata* (§. 434).

COROLLARIUM I.

454. *Sphæram superficies sunt in duplicata ratione diametrorum*. Diametri namque sunt *directe* inter se, ut radii (§. 94);

COROLLARIUM II.

455. *Sphærarum superficies sunt directe inter se, ut quadrata suorum radiorum.* Superficies nimirum sphæræ CB est ad superficiem sphæræ *cb*, ut quadratum AD radii AB ad quadratum *ad* radii *ab*. Sunt enim & ipsa quadrata in ratione radiorum AB, *ab duplicata* (§. 345). Eadem ratione *superficies sphærarum sunt, ut diametrorum quadrata*.

COROLLARIUM III.

456. *Sphærarum diametri, & semidiametri sunt in ratione subduplicata superficierum earundem* (§. 57).

THEOREMA XIII.

Sphæræ sunt in ratione triplicata suorum radiorum.

457. Spectentur sphæræ CB, *cb* (*fig.* 5. 6. *Tab.* IV.), quarum radii sint rectæ AB, *ab*. Dico, sphæram CB esse ad sphæram *cb* in ratione *triplicata* radii AB ad *radium ab*.

Demonstratio.

Cum enim sphæræ CB, *cb* sint polyedra regularia ejusdem generis (§. 452), erunt & ipsæ in ratione suorum radiorum AB, *ab triplicata* (§. 449).

COROLLARIUM I.

457. Quoniam diametrorum ratio diversa non est a ratione radiorum (§. 94), *erunt sphæræ in ratione suarum etiam diametrorum triplicata*.

COROLLARIUM II.

459. Quamobrem, *si ratio radiorum, vel diametrorum duarum*

rum sphærarum continuetur usque ad quartum terminum, sphæra erit ad sphæram, ut illorum primus ad quartum. Vide, quæ diximus §. 443.

COROLLARIUM III.

469. Cum cubi sint in ratione *triplicata* suorum laterum (§. 438), *sphæra erunt inter se, ut cubi suorum radiorum, & diametrorum.*

COROLLARIUM IV.

463. *Sphærarum diametri & semidiametri sunt in ratione ipsarum sphærarum subtriplicata* (§. 57). Ex ratione namque tam diametrorum, quam semidiametrorum ducta in seipsam *duplicatam*, ratio ipsarum sphærarum emergit.

SECTIO QUINTA.

De circulis sphæra.

DEFINITIO I.

462. *Axis sphæra est recta linea per sphæræ centrum transiens, & utrinque ad illius superficiem terminata, circa quam omnino immobilem sphæra ipsa rotatur.* Ut si sphæra ACBD (*fig.* 7. *Tab.* IV.) concipiatur revolvi circa rectam AB per illius centrum ductam, utrinque ad ejusdem superficiem terminatam, & plane immobilem, recta AB erit axis sphæræ ACBD.

COROLLARIUM.

463. *Axis itaque sphæræ est una ex illius diametris* (§. 382).

DEFINITIO II.

464. *Poli sive cardines sphæra sunt puncta extrema axis,*

atque adeo ad motum sphæræ circum axim plane immobilia. Ut si recta AB (*fig.* 7. *Tab.* IV.) fuerit *axis* sphæræ ACBD, illius *poli* erunt duo puncta A, B.

DEFINITIO III.

465. *Circulus sphæræ vocatur ille, cujus peripheria in sphæræ superficie reperitur, eamque circumambit*. Hujusmodi in sphæra ACBD est circulus CD (*fig.* 7. *Tab.* IV).

DEFINITIO IV.

466. *Axis circuli sphæræ est recta linea per centrum ipsius circuli transiens, illius plano ad perpendiculum incumbens, atque ad sphæræ superficiem terminata*. Sic recta AB est axis circuli C*e*D in sphæra ACBD (*fig.* 7. *Tab.* IV). Transit quippe per illius centrum *a*, ejusdem plano ad perpendiculum incumbit, & utrinque in sphæræ superficiem definit. Dicitur autem *axis*; quia circa illam immobilem circulus ipse rotari concipitur.

SCHOLION.

467. Recta AB dicitur insistere plano circuli C*e*D ad perpendiculum, si fuerit perpendicularis omnibus rectis *a*C, *ae*, *a*D ductis ex puncto *a*, per quod illa transit, in plano C*e*D ipsius circuli.

DEFINITIO V.

468. *Poli circuli in sphæra sunt extrema puncta axis ipsius circuli*. Ut si recta AB fuerit *axis* circuli C*e*D in sphæra ACBD (*fig.* 7. *Tab.* IV.), illius *poli* erunt puncta extrema A, B.

COROLLARIUM I.

469. Hinc *circulorum in sphæra, quorum idem est axis iidem quo-*

quoque sunt poli; & vicissim, *quorum iidem sunt poli, idem pariter est axis*.

COROLLARIUM II.

470. *Si axis sphæræ fuerit axis circuli in ipsa sphæra descripti, illius itidem poli erunt poli ipsius circuli*. Similiter, *si poli sphæræ fuerint poli etiam circuli in ea positi, idem quoque erit utriusque axis*.

DEFINITIO VI.

471. *Distantia circuli in sphæra a suis polis est arcus circuli per illius polos transeuntis, inter polum & circuli peripheriam comprehensus*. Ut si *poli* circuli *abc* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) in sphæra A*d*B*f* fuerint puncta A, B, ducto per utrumque *polum* circulo A*e*B, arcus A*b* determinabit distantiam ipsius circuli *abc* a *polo* A, & arcus *be*B distantiam definiet ejusdem circuli a *polo* B.

SCHOLION.

472. Tot ergo *graduum* & *minutorum* erit distantia circuli *abc* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) a suo *polo* A, quot *gradus* & *minuta* in arcu A*b* continentur. Æqualiter quoque distabit circulus hinc inde a suis *polis*, si arcus, ex quibus ejusmodi distantia desumitur, fuerint æquales. Ut si puncta A, B fuerint *poli* circuli C*e*D (*fig.* 7. *Tab.* IV.), æqualiter hinc inde distabit circulus ipse C*e*D a suis *polis*, si arcus A*e*, *e*B fuerint æquales.

DEFINITIO VII.

473. *Circuli in sphæra paralleli sunt illi, qui æqualiter ubique distant a se mutuo*. *Æqualiter autem a se mutuo distare dicuntur, cum æquales sunt arcus circulorum per unius polos transeuntium, inter ipsorum circulorum peripherias comprehensi*. Sic duo

duo circuli *abc*, *def* in sphæra *AdBf* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) sunt paralleli; quia, si per *polos* A, B unius *abc* ducantur circuli *AdBf*, *AeB*, arcus *ad*, *be*, *cf* sunt æquales.

DEFINITIO VIII.

474. *Duo circuli in sphæra dicuntur æqualiter distare ab illius centro, cum æquales sunt rectæ, quæ a sphæræ centro in centra ipsorum circulorum cadunt; sive cum æqualiter a sphæræ centro distant ipsorum diametri.* Ut si eadem fuerit distantia diametrorum AB, DE circulorum *AaB*, *CeE* (*fig.* 11. *Tab.* IV.) a centro *x* sphæræ ADB, duo circuli *AaB*, *DeE* æqualiter distare dicentur a centro ipsius sphæræ.

DEFINITIO IX.

475. *Anguli sphærales sunt illi, qui a peripheriis duorum maximorum circulorum sese mutuo secantibus in ipsius sphæræ superficie producuntur.* Hujusmodi sunt anguli *NaM*, *MaQ*, *NaP*, *PaQ* (*fig.* 12. *Tab.* IV.) producti in superficie sphæræ MNPQ a peripherijs duorum circulorum in ipsa sphæra maximorum *NaQ*, *MaP*. Qui autem sint circuli in sphæra maximi, determinabitur infra §. 491.

SCHOLION.

476. Quemadmodum anguli *rectilinei*, ita anguli *sphærales* dividuntur in *rectos*, *acutos*, & *obtusos*. Ut autem horum omnium distincta notio habeatur, observandum est, *mensuram anguli sphæralis esse arcum circuli descripti in sphæræ superficie circa commune sectionis punctum, tanquam centrum, inter arcus, qui angulum ipsum constituunt, comprehensus.* Sic descripto in superficie sphæræ MNPQ (*fig.* 12. *Tab.* IV.) circa punctum *a*, in quo sese mutuo secant peripheriæ duorum circulorum maximorum *NaQ*, *MaP*, circulo *bexz*, arcus *be* ipsius circuli contentus inter arcus *Ma*, *Na*, qui angu-

angulum constituunt N*a*M, erit mensura ipsius anguli *sphæralis* N*a*M, adeo ut tot *graduum* & *minutorum* sit angulus N*a*M, quot *gradus* & *minuta* in arcu *be* numerantur. Quemadmodum ergo duæ rectæ lineæ in centro circuli sese mutuo secantes, producunt quatuor angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales (§. 129), ita quatuor *sphærales* angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales producunt in puncto sectionis *a* peripheriæ duorum circulorum N*a*Q, M*a*P. Et sicuti omnes anguli *rectilinei* recti sunt æquales inter se (§. 126), eorumque idcirco mensura est quarta pars peripheriæ circuli ex ipsorum apice descripti, ita omnes anguli *sphærales* recti sunt æquales inter se; eosque metitur quarta pars peripheriæ circuli circa punctum sectionis in sphæræ superficie descripti. Rectus nimirum erit angulus *sphæralis* N*a*M, si arcus *eb*, qui illius est mensura, fuerit quarta pars peripheriæ totius circuli *bexz*; cumque, ut de *rectilineis* diximus, *angulus obtusus sint ille, qui major est recto; acutus vero, qui a recto deficit*, angulus quoque *sphæralis* obtusus erit ille, qui rectum superat, quique proinde habet pro mensura arcum majorem quadrante circuli; angulus vero *sphæralis* acutus is erit, qui minor est recto; atque adeo, qui hujusmodi est, ut ejus mensura sit arcus circuli minor quadrante. Ex his porro sequitur

COROLLARIUM I.

477. *Angulos sphærales esse directe inter se, ut arcus circuli, qui angulos ipsos metiuntur;* & viciſſim *hujusmodi arcus esse directe, ut ipsi anguli.*

COROLLARIUM II.

478. *Angulum sphæralem esse ad quatuor rectos sphærales, ut est arcus, qui eum metitur, ad totam circuli peripheriam;* & viciſſim *arcum hujusmodi esse ad totam peripheriam, ut est ipse angulus sphæralis ad quatuor rectos.* Memoria repetantur,

quæ

quæ diximus de angulis *rectilineis* §. 246, & §. 247.

DEFINITIO X.

479. *Ille circulus in sphæra maximus dicitur* rectus, *qui eosdem cum illa polos habet*. Contra vero *ille vocatur* obliquus, *cujus poli a polis ipsius sphæræ sunt diversi*. Sic in sphæra AGBD (*fig.* 19. *Tab.* IV.), cujus *poli* sint puncta A, B, *rectus* est circulus CeD; *obliquus* vero circulus MeN.

AXIOMA I.

480. *Illi arcus ejusdem, vel æqualium circulorum sunt æquales inter se, quorum chordæ sunt æquales.*

AXIOMA II.

481. *Illi circuli sunt æquales inter se, quorum diametri sunt æquales. Illi vero sunt inæquales, quorum diametri sunt inæquales, adeo nimirum ut ille sit major, qui majorem habeat diametrum.*

LEMMA I.

482. *Rectæ lineæ in sphæra æquales æqualiter ab illius centro distant, & quæ æqualiter ab illius centro distant, sunt æquales.* Demonstratio utriusque partis eadem est cum illa, qua hæc ipsa symptomata ostensa sunt §. 260, & §. 261. de hujusmodi rectis in circulo. Ut enim in circulo, ita *in sphæra illæ rectæ æqualiter a centro distare dicuntur, in quas ab ipso centro æquales perpendiculares cadunt.*

LEMMA II.

483. *Diameter sphæræ, sive recta, quæ per sphæræ centrum transit, est omnium rectarum, quæ in ipsa sphæra duci possunt, maxima*, & vicissim *maxima rectarum in sphæra per illius cen-*

centrum transit. Demonstrantur eodem modo, quo §. 262, & §. 264. hæc ipsa ostensa sunt de haud dissimili recta in circulo.

LEMMA III.

484. *Recta in sphæra eo minor est, quo magis ab illius centro distat*. Ostenditur eodem modo, quo §. 263. idipsum ostensum est de hujusmodi recta in circulo.

THEOREMA I.

Si sphæra secetur plano, sectio erit circulus.

I.

485. Sphæra ACBD (*fig*. 7. *Tab*. IV.) secetur plano CeD, quod per illius centrum *a* transeat. Dico, sectionem CeD esse circulum.

Demonstratio.

Etenim omnes rectæ *a*C, *ae*, *a*D ductæ a centro *a* in plano sectionis ad superficiem sphæræ, sunt inter se æquales (§. 382). Ergo planum CeD est circulus (§. 239).

I I.

486. Secetur sphæra A*be* (*fig*. 9. *Tab*. IV.) plano extra ipsius sphæræ centrum *d* transeunte, sitque sectio *bce*. Dico, hanc esse circulum.

Demonstratio.

A centro *d* sphæræ in planum sectionis *bce* cadat recta perpendicularis *da*; atque a puncto *a* in ipso plano ducantur rectæ *ab*, *ac*, necnon a centro *d* ad extrema puncta *b*, *c* rectæ *db*, *dc*. Cum igitur ex facta hypothesi anguli *dab*, *dac* triangulorum *dab*, *dac* sint recti (§. 467), quadratum re-

ctæ

ctæ *db* æquabit quadrata laterum *da*, *ab* ſimul ſumta, & quadratum rectæ *dc* quadrata laterum *da*, *ac* (§. 232). Quadrata autem rectarum *db*, *dc* ſunt æqualia (§. 213); cum ipſæ rectæ, utpote ſphæræ radii, ſint æquales (§. 383): Ergo etiam quadrata rectarum *da*, *ab* ſimul ſumta erunt æqualia quadratis itidem ſimul ſumtis rectarum *da*, *ac* (§. 24). Quamobrem, ſublato quadrato communis rectæ *da*, quadratum rectæ *ab* erit æquale quadrato rectæ *ac* (§. 27); ac proinde ipſæ quoque rectæ *ab*, *ac* erunt æquales (§. 232). Eodem modo oſtendam, omnes rectas ductas a puncto *a* in plano *bce* ad curvam *bce* eſſe æquales inter ſe. Igitur planum, ſive ſectio *bce* eſt circulus (§. 239); adeoque &c.

COROLLARIUM I.

487. *Centrum circuli per ſphæræ centrum tranſeuntis diverſum non eſt a centro ipſius ſphæræ.* Demonſtravimus enim §. 485, omnes rectas ductas a puncto *a*, quod eſt centrum ſphæræ ACBD (*fig.* 7. *Tab.* IV.), in plano circuli C*e*D eſſe inter ſe æquales. Igitur centrum *a* ſphæræ eſt etiam centrum ipſius circuli (§. 420) Hinc

COROLLARIUM II.

488. *Diameter circuli per ſphæræ centrum tranſeuntis non eſt diverſa a diametro ipſius ſphæræ.*

COROLLARIUM III.

479. Quoniam ex demonſtratione §. 486, omnes rectæ ductæ a puncto *a* in plano circuli *bce* (*fig.* 9. *Tab.* IV.) ſunt æquales inter ſe; ac proinde punctum *a* eſt centrum ipſius circuli *bce* (§. 240), recta autem *da* ducta a centro ſphæræ *d* ad punctum *a*, eſt plano *bce* perpendiculari, liquido apparet, *rectam ductam a centro ſphæræ in planum circuli extra ſphæræ centrum tranſeuntis, eique ad perpendiculum incumbentem,*

tran-

transire per centrum ipsius circuli; ac proinde etiam vicissim *rectam transeuntem per centrum circuli in sphæra, eique insistentem ad perpendiculum, transire per centrum ipsius sphæra.* Cumque hujusmodi recta *ab* non differat ab axe ipsius circuli (§. 466) manifestum efficitur.

COROLLARIUM IV.

490. *Axim cujusvis circuli in sphæra transire per ipsius sphæræ centrum.*

THEOREMA II.

Circulus in sphæra, qui per illius centrum transit, est omnium maximus; & vicissim circulus in sphæra maximus per illius centrum transit.

I.

461. Circulus C*e*D (*fig.* 7. *Tab.* IV.) in sphæra ACBD transeat per illius centrum *a*. Dico, circulum C*e*D esse in ipsa sphæra maximum.

Demonstratio.

Cum enim diameter CD circuli C*e*D non sit diversa a diametro ipsius sphæræ (§. 488), erit maxima rectarum, quæ in ipsa sphæra extra centrum duci possunt (§. 483); atque propterea erit maxima diametrorum circulorum omnium, qui extra sphæræ centrum transeunt. Ergo circulus quoque C*e*D erit omnium illorum circulorum maximus (§. 481).

II.

492. Vicissim vero circulus C*e*D sit maximus in sphæra ACBD. Dico, ipsum transire per illius centrum.

Demon-

Demonstratio.

Si namque circulus CeD est maximus, illius quoque diameter CD maxima erit rectarum, quæ in ipsa sphæra duci possunt. Hæc autem per ipsius sphæræ centrum transit (§. 483). Ergo circulus itidem CeD per ejusdem sphæræ centrum transeat, necesse est.

COROLLARIUM I.

493. *Centrum circuli in sphæra maximi diversum non est a centro ipsius sphæræ* (§. 487); atque adeo *omnes circuli in sphæra maximi idem centrum habent.*

COROLLARIUM II.

494. *Omnes circuli in sphæra maximi sunt æquales.* Cum enim ipsorum centrum non sit diversum a centro sphæræ (§. 493), eorum quoque diametri erunt diametri sphæræ. Hæ autem sunt omnes inter se æquales (§. 383). Ergo ipsi itidem circuli erunt æquales (§. 431).

COROLLARIUM III.

495. *Omnis circulus in sphæra maximus sphæram ipsam bifariam dividit.* Id enim aperte ex eo sequitur, quod per sphæræ centrum transeat (§. 492), ut ex §. 383. est manifestum.

COROLLARIUM IV.

496. *Omnes circuli in sphæra maximi etiam sese mutuo bifariam dividunt.* Duo enim circuli ACBD, CeD (*fig.* 7. *T.* IV.) nequeunt esse maximi in sphæra ACBD, quin idem sit utriusque centrum *a* (§. 493); ac proinde quin illi ita sese mutuo dividant, ut communis eorum sectio, recta scilicet CD,

per

per ipsorum centrum transeat. Hæc autem circulos ipsos bifariam secat (§.241). Ergo &c.

COROLLARIUM V.

497. *Omnis circulus in sphæra. qui per alterius polos transit, est maximus*. Sic maximus in sphæra AdBf (*fig.* 8. *Tab.* IV.) est circulus AeB, qui transit per *polos* A, B circuli *def*. Quandoquidem, cum *axis* AB circuli *def* transeat per centrum *x* ipsius sphæræ (§. 490); neque possit circulus AeB transire per *polos* A, B, quin *axis* AB sit in plano ipsius circuli AeB, ipse quoque circulus AeB transibit per centrum *x* sphæræ; ac proinde erit in illa maximus (§.491).

SCHOLION.

498. Maximus itaque in sphæra est circulus, qui distantiam metitur alterius in ea circuli a suis *polis* (§. 471.).

COROLLARIUM IV.

499. *Omnes circuli, qui per polos alterius circuli in sphæra transeunt, sunt inter se æquales*. Id enim aperte ex eo sequitur, quod omnes sint in sphæra maximi (§. 494).

THEOREMA III.

Si per polos circuli in sphæra quamplures circuli ducantur, omnes illorum arcus inter polum & peripheriam ipsius circuli comprehensi, sunt æquales.

500. Per polos A, B circuli CeD in sphæra ACBD. (*fig.* 7. *Tab.* IV) transeant duo circuli ACBD, AeB. Dico, arcus AC, Ae, AD ipsorum circulorum, qui inter polum A, & circuli peripheriam CeD continentur, esse inter se æquales, sicuti etiam arcus BC, Be, BD.

Demonstratio.

Recta AB sit axis circuli CeD; ac proinde transeat per illius centrum *a*, ejusque plano ad perpendiculum incumbat (§. 466.). Ductis autem radiis *a*C, *ae*, *a*D, jungantur puncta A, C, A, *e*, A, D rectis AC, A*e*, AD. Igitur, quoniam rectæ *a*C, ae, *a*D sunt æquales (§. 241.), sicuti etiam anguli A*a*C, A*ae*, A*a*D (§. 126.), utpote recti ex hypothesi, & recta A*a* sit communis omnibus triangulis A*a*C, A*ae*, A*a*D, rectæ sive bases AC, A*e*, AD ipsorum triangulorum erunt æquales (§.195). Sunt autem chordæ circulorum æqualium ACBD, A*e*B (§. 499.). Ergo arcus quoque AC, A*e*, AD erunt æquales (§. 480.). Eodem modo ostendentur æquales etiam arcus BC, B*e*, BD. Itaque si &c.

COROLLARIUM.

501. *Polus itaque circuli in sphæra est veluti centrum, ex quo ipsius circuli peripheria in sphæræ superficie, tamquam in plano, describitur.*

THEOREMA IV.

Omnis circulus in sphæra maximus distat a suis polis quadrante circuli maximi.

502. In sphæra ACBD (*fig.* 10. *Tab.* IV.) esto circulus maximus CeD*a*, cujus *poli* sint puncta A, B. Dico, distantiam ipsius circuli ab utroque *polo* quadrantem æquare circuli maximi.

Demonstratio.

Per *polos* A, B transeat circulus A*e*B*a*. Cum igitur is sit maximus (§.497.), & bifariam a circulo CeD*a* dividatur (§. 496), portio *e*A*a* erit semicirculus. Arcus autem A*e*, A*a*, qui distantiam metiuntur ipsius circuli a *polo* A, sunt æqua-

æquales (§. 500). Ergo uterque est quadrans circuli. Eodem modo ostendam, utrumque arcum Be, Ba, qui metiuntur distantiam ejusdem circuli ab altero polo B, esse quadranti æqualem. Igitur &c.

COROLLARIUM.

503. *Omnis idcirco circulus in sphara maximus aqualiter hinc inde distat a suis polis* (§. 472).

THEOREMA V.

Si tres circuli in sphæra maximi sese mutuo ad angulos rectos secuerint, puncta sectionum erunt illorum poli respective.

504. In sphæra ACBD (*fig.* 10. *Tab.* IV.) sint tres circuli maximi ACBD, AeBa, CeDa, qui sese mutuo dividant ad angulos rectos. Dico, puncta sectionum A, B esse *polos* circuli CeDa, puncta e, a esse *polos* circuli ACBD, & puncta C, D esse *polos* circuli AeBa.

Demonstratio.

Cum enim anguli sphærales CeA, AeD, DeB, BeC sint recti, adeoque æquales inter se, circulus ACBD divisus erit in quatuor quadrantes in punctis A, C, B, D (§. 477.). Eadem ratione divisus erit in quatuor quadrantes in punctis A, e, B, a circulus AeBa, sicuti etiam circulus CeDa in punctis C, e, D, a. Quilibet autem circulus in sphæra maximus distat a suis *polis* quadrante circuli maximi (§. 502). Ergo puncta A, B erunt *poli* circuli CeDa, puncta a, e *poli* circuli ACBD, & puncta C, D *poli* circuli AeBa.

THEO-

THEOREMA VI.

Circuli in sphæra æquales æqualiter ab illius centro distant, & qui æqualiter ab illius centro distant, sunt æquales.

I.

505. In sphæra ADB (*fig.* 11. *Tab.* IV.) sint duo æquales circuli A*a*B, D*e*E. Dico, eos æqualiter distare a centro *x* ipsius sphæræ.

Demonstratio.

Cum enim circuli A*a*B, D*e*E sint æquales, æquales erunt eorum diametri AB, DE (§. 481). Rectæ autem AB, DE nequeunt esse æquales, quin æqualiter distent a centro *x* sphæræ (§. 482). Ergo æqualiter quoque ab ipso centro distant circuli A*a*B, D*e*E (§. 474).

II.

506. Vicissim vero duo circuli A*a*B, D*e*E æqualiter distent a centro *x* sphæræ ADB. Dico, eos esse inter se æquales.

Demonstratio.

Stante siquidem hypothesi, æquales sunt ipsorum circulorum diametri AB, DE (§. 482). Ergo ipsi quoque circuli sunt æquales (§. 481).

THEOREMA VII.

Circuli in sphæra eo minores sunt, quo magis ab illius centro distant.

507. In sphæra A*d*B*f* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) duo spectentur circuli *def*, *abc*, quorum *abc* magis, quam alter *def*, distet ab

ab ipsius sphæræ centro *x*. Dico, circulum *abc* minorem esse circulo *def*.

Demonstratio.

Diameter namque *ac* circuli *abc*, utpote quæ magis distat a centro *x*, est minor diametro *df* circuli *def* (§. 484.). Ergo circulus *abc* minor itidem est circulo *def* (§. 481.

THEOREMA VIII.

Circuli in sphæra paralleli eosdem polos habent, & vicissim, qui habent eosdem polos, sunt paralleli.

I.

508. In sphæra *AdBf* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) sint duo circuli paralleli *abc*, *def*, sintque puncta A, B *poli* circuli *abc*. Dico, puncta A, B esse *polos* etiam circuli *def*.

Demonstratio.

Ductis per *polos* A, B circulis *AdBf*, *AeB*, cum ob hypothesim arcus *Aa*, *Ab*, *Ac* sint æquales (§. 500), sicuti etiam arcus *ad*, *be*, *cf*, (§. 473.), arcus quoque *Ad*, *Ae*, *Af* erunt æquales (§. 26). Igitur punctum A erit *polus* etiam circuli *def* (§. 501). Eodem modo ratiocinare etiam de *polo* B.

II.

509. Vicissim vero puncta A, B sint *poli* utriusque circuli *abc*, *def*. Dico; circulos *abc*, *def* esse parallelos.

Demonstratio.

Ductis namque circulis *AdBf*, *AeB* per ipsos *polos*, cum tam arcus *Ad*, *Ae*, *Af*, quam arcus *Aa*, *Ab*, *Ac*, sint æquales inter se (§. 500), sublatis æqualibus *Aa*, *Ab*, *Ac*,

reliqui *ad*, *be*, *ef* erunt æquales (§. 27). Igitur circuli *abc*, *def* sunt paralleli (§. 473).

COROLLARIUM I.

510. *Circuli in sphæra paralleli eundem axim habent*; & vicissim, *qui habent eundem axim*, *sunt paralleli*. Non enim *iidem* possunt esse omnium *poli*, quin idem sit omnium *axis*; neque potest esse idem *axis*, quin iidem itidem sint omnium *poli* (§. 468.).

COROLLARIUM II.

511. *Illi omnes circuli in sphæra sunt paralleli inter se, quorum poli diversi non sunt a polis ipsius sphæræ*. Omnes enim hoc ipso habent eosdem *polos*.

THEOREMA IX.

Arcus circulorum parallelorum in sphæra, inter peripherias circulorum maximorum per illorum polos transeuntium comprehensi, sunt sibi mutuo similes.

512. In sphæra A*d*B*f* (*fig.* 8. *Tab.* IV.) sint duo circuli paralleli *abc*, *def*, per quorum *polos* A, B transeant duo circuli maximi A*d*B*f*, A*e*B. Dico, arcus *ab*, *de*, quos intercipiunt semiperipheriæ A*d*B, A*e*B, esse sibi mutuo similes.

Demonstratio.

Tam arcus *ab* est ad totam sui circuli peripheriam *abc*, quam arcus *de* ad totam peripheriam sui circuli *def*, ut se habet angulus sphæralis *dAe* ad quatuor rectos, qui circa *polum* A in sphæræ superficie esse possunt (§. 478). Ergo arcus *ab*, *de* sunt sibi mutuo similes (§. 288.).

Co-

COROLLARIUM.

513. *Quot ergo* gradus *&* minuta *sunt in arcu* ab, *tot in arcu* de *numerantur*.

SECTIO SEXTA.

De sectionibus conicis, sive de ellipsi, parabola, & hyperbola.

QUemadmodum si sphæra secetur plano, illius sectio est *circulus*, ita si conus secetur plano, quod neque illius basi sit parallelum, neque per illius axim transeat, tres emergunt figuræ planæ, quarum una *ellipsis*, altera *parabola*, tertia *hyperbola* nuncupatur; omnes vero, communi vocabulo, *conicæ sectiones* dicuntur. Pauca igitur, quæque magis naturalis Philosophiæ tyronibus scitu necessaria sunt, ex plurimis eximiisque harum figurarum symptomatis, hic exhibemus, ac leviter tantum attingimus: leviter, inquam, & quidem absque ulla demonstratione. Sunt enim nimis plura, quemadmodum ex lib. XV. nostrorum *Elementorum* patet, quæ præmittenda essent, ac demonstranda, ut, quæ hoc loco a nobis indicantur, *sectionum conicarum* symptomata rigide ostenderentur.

DEFINITIO I.

514. *Diameter figuræ curva linea comprehensæ est recta quæcumque bifariam dividens omnes rectas eidem rectæ, atque adeo etiam inter se, parallelas, quæ in ipsa figura duci possunt.* Sic recta BM (*fig.* 13. *Tab.* IV.) est *diameter* figuræ ABC; quia bifariam dividit omnes rectas parallelas *ab*, *df*, AC.

DEFINITIO II.

515. *Axis figuræ est recta non solum bifariam, verum etiam ad angulos rectos, dividens omnes rectas eidem rectæ, & inter se parallelas.* Hujusmodi est recta BM in figura ABC (*fig.* 13. *Tab.* IV.); quippe bifariam, & ad rectos angulos dividit rectas parallelas *ab*, *df*, AC.

DEFINITIO III.

516. *Vertex curvæ est punctum extremum axis.* Sic punctum B est *vertex* curvæ ABC (*fig.* 13. *Tab.* IV.) utpote extremum *axis* BM.

DEFINITIO IV.

517. *Ordinatim diametro applicata dicitur qualibet illarum rectarum parallelarum, quæ ab ipsa diametro bifariam dividuntur.* Sic rectæ parallelæ *ab*, *df* (*fig.* 13. *Tab.* IV.) dicuntur diametro BM, a qua secantur bifariam, *ordinatim applicatæ*. Partes vero harum rectarum dimidiæ, scilicet *ac*, *de*, *diametro semiordinatæ* nuncupantur.

DEFINITIO V.

518. *Abscissæ*, quæ etiam *sagittæ* vocari solent, *dicuntur illæ portiones diametri, quæ inter diametri verticem & rectas ipsi diametro applicatas continentur.* Sic portio Bc diametri BM (*fig.* 13. *Tab.* IV.) dicitur *abscissa* correspondens *ordinatæ ab*; & portio Be *abscissa* correspondens *ordinatæ df*.

De ellipsi.

I.

519. *Ellipsis est figura plana unica curva linea comprehensa,*

sa; in qua rectarum ad axim semiordinatarum quadrata sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus axis, illis tamen non sunt aequalia. Sic figura curvilinea ACBD (*fig.* 14. *Tab.* IV.), cujus *axis* sit recta AB, & *semiordinatae* rectae *ab*, *cd*, erit *ellipsis*, si quadratum *cx semiordinatae cd* fuerit ad quartum *ae semiordinatae ab*, ut est rectangulum ex *Ac* in *cB*, scilicet *ycBm*, ad rectangulum ex *Aa* in *aB*, nempe *zaBn*; verum nec quadratum *cx* adaequet rectangulum *ycBm*, nec quadratum *ae* rectangulum *zaBn*.

II.

520. Hinc patet discrimen maximum *ellipseos* a *circulo*, cui illa affinis est. Cum enim in circulo ACBD (*fig.* 15. *Tab.* IV.) recta E*a* perpendicularis diametro AB sit *media* proportionalis inter partes A*a*, *a*B, & recta C*b* inter partes A*b*, *b*B diametri AB (§. 318), quadratum rectae E*a* aequabit rectangulum A*a*×*a*B, & quadratum rectae C*b* rectangulum A*b*×*b*B (§. 74), ac proinde quadrata *semiordinatarum* in *circulo* non solum sunt *directe* inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus *axis*, quemadmodum in *ellipsi*, verum etiam sunt illis *respective* aequalia, contra ac in *ellipsi* A*c*B*f* contingat; cum scilicet in ea quadrata *semiordinatarum ea*, *cb* iisdem rectangulis sint minora.

III.

521. Quamvis ergo, ut in *circulo* ACBD (*fig.* 15. *Tab.* IV.), ita in *ellipsi* A*c*B*f*, punctum medium *b axis* AB illius *centrum* dicatur, quod in utraque figura rectae per illud transeuntes, bifariam in ipso dividantur, in *ellipsi* tamen hujusmodi rectae, scilicet AB, *ym*, *zx*, *fc*, non sunt omnes, quemadmodum in *circulo*, aequales inter se, sed inaequales.

IV.

522. Maxima porro AB diametrorum *ellipseos* A*c*B*f* *major*

major ipsius *axis*, & minima *cf minor axis*, & quidem majori *conjugatus*, vocatur. Sicuti enim recta AB bifariam, & ad angulos rectos dividit rectam *cf*, & omnes rectas ipsi *cf* parallelas, ita recta *cf* bifariam, & ad rectos itidem angulos rectam secat AB, easque omnes rectas, quæ eidem AB sunt parallelæ. Reliquæ vero diametri *ym*, *zx* ita se habent in *ellipsi*, ut eo sint majores, quo magis *majori axi* accedunt. Verum illæ sunt æquales inter se, quæ æqualiter hinc inde ab eodem axe distant; quo fit propterea, ut in *ellipsi* binæ tantum sint diametri inter se æquales.

V.

523. *Parameter axis ellipseos est recta, tertia continuo geometrice proportionalis post utrumque axim, ducta per illius extremum, eique ad perpendiculum incumbens.* Sic recta AE (*fig.* 16. *Tab.* IV.) perpendicularis axi AB erit *parameter* axis AB, si axis AB fuerit ad axim CD, ut ipse axis CD ad rectam AE. Quadratum idcirco unius axis CD erit æquale rectangulo AM contento sub altero axe AB, ejusque *parametro* AE. Quoniam vero, ducta ab extremo puncto E *parametri* AE ad extremum B axis AB recta EB, quadratum cujusvis *semiordinatæ ab* adæquat rectangulum contentum sub *abscissa* A*a*, & sub recta *a*F intercepta inter ipsum axim AB, & rectam EB; deficitque hoc rectangulum, scilicet A*a*FH, a rectangulo A*a*KE, quod sub eadem *abscissa* A*a*, & sub *parametro* AE continetur, figura ACBD, propter hujusmodi defectum, *ellipsis* sive *deficiens* dicta est.

VI.

524. *Foci ellipseos*, qui illius etiam *umblici* vocantur, *sunt duo puncta sumta in majori axe ex æqua hinc inde remota a centro, atque adeo etiam a suo vertice respective, quorum distantia ab extremo minoris axis majorem ellipseos semiaxim adæquat.* Videlicet duo puncta *a*, *e* (*fig.* 16. *Tab.* IV.) sumta

sumta in axe majori AB *ellipseos* ACBD, remota ex æquo a centro N, ac proinde etiam a suo vertice *respective*, erunt *foci* seu *umblici* ipsius *ellipsis* ACBD, si utraque rectarum *a*C, *e*C, quæ cadunt ex illis punctis in punctum extremum C minoris axis CD, fuerit æqualis majori semiaxi AN. Ea porro est distantia utriusque *foci* a suo vertice *respective*, nimirum *foci a* a vertice A, ut *semiordinata* ab illis ducta, scilicet *semiordinata ab*, *semiparametrum* Az adæquet.

VII.

525. Verum circa *focos ellipsis* duo occurrunt observatione apprime digna. Primum est, *si ex ipsis focis ad singula puncta perimetri elliptici inclinentur duæ rectæ, earum summam æquare majorem axim*. Nimirum ductis ex focis *a*, *e* (*fig.* 16. *Tab.* IV.) ad punctum P rectis *a*P, *e*P; ad punctum C rectis *a*C, *e*C; & ad punctum Q rectis *a*Q, *e*Q, summam duarum *a*P, *e*P, sicuti etiam summam duarum *a*C, *e*C, necnon duarum *a*Q, *e*Q, æquare majorem axim AB; ac proinde hujusmodi summas etiam inter se esse æquales. Alterum vero, *æquales esse angulos a*P*n*, *e*P*m*, *quos cum recta tangente mn efficiunt rectæ a*P, *e*P *ductæ ex focis* a, e *ad punctum contactus* P, *quemadmodum etiam angulos a*Q*f*, *e*Q*d*, *quos constituunt in puncto contactus* Q *rectæ a*Q, *e*Q *cum recta tangente fd*.

De parabola.

I.

526. *Parabola est figura plana curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata sunt directe inter se, ut correspondentes abscissæ.* Esto figura plana curva linea BAC (*fig.* 17. *Tab.* IV.) comprehensa, cujus *axis* sit recta AM, *semiordinatæ* vero rectæ *ab*, *cd*, quæ sic se habeant, ut quadratum *ae semi-*

ordi-

ordinatæ ab sit ad quadratum *cf semiordinatæ cd*, ut est *abscissa* Aa ad *abscissam* Ac, figura hujusmodi erit *parabola*; & curva BAC *parabolica* nuncupatur.

I I.

527. Hinc *semiordinatæ ad axim in parabola sunt in ratione subduplicata abscissarum; abscissæ vero in ratione semiordinatarum duplicata*. Cum enim quadratum *cf semiordinatæ cd* (*fig.* 17. *Tab.* IV.) sit ad quadratum *ae semiordinatæ ab*, ut *abcissa* Ac ad *abscissam* Aa, sicuti *semiordinata cd* est ad *semiordinatam ab* in ratione *subduplicata* quadratorum *cf*, *ae* (§. 344.), ita ipsæ *semiordinatæ* erunt quoque in *subduplicata* ratione *abscissarum* Ac, Aa; & vicissim sicuti quadratum *cf* est ad quadratum *ae* in *duplicata* ratione *semiordinatarum cd*, *ab* (§. 345.), in eadem ratione erunt itidem inter se correspondentes *abscissæ* Ac, Aa.

I I I.

528. *Parameter parabolæ est recta continuo geometrice proportionalis post quamlibet abscissam, eique correspondentem semiordinatam ad axim, ducta ex vertice axis, atque illi ad perpendiculum incumbens*. Recta nimirum perpendicularis AD (*fig.* 17. *Tab.* IV.) ducta ex vertice axis AM erit *parameter* parabolæ BAC, si *abscissa* Aa fuerit ad *semiordinatam ab*, ut est ipsa *ab* ad rectam AD. Hinc in *parabola quadratum cujuslibet semiordinatæ adæquat rectangulum contentum sub parametro, & sub correspondente abscissa*. Sic quadratum *ae semiordinatæ ab* erit æquale rectangulo AaxD (§. 74.); & ob hanc æqualitatem figura hujusmodi dicta est *parabola*.

I V.

529. *Focus, sive umblicus parabolæ est punctum sumtum in illius axe, cujus distantia a vertice quartam parametri partem adæ-*

adæquat. Sic punctum *a* axis AM (*fig.* 17. *Tab.* IV.) erit *focus parabolæ* BAC, si ipsius puncti distantia A*a* a vertice A fuerit æqualis quartæ parti AF *parametri* AD. Porro, ut in *ellipsi*, ita in *parabola*, recta *semiordinata ab* ducta ex *foco* adæquat *semiparametrum*; & si ad quodvis punctum E curvæ *parabolicæ* BAC ducatur recta *m*E axi AM parallela, & ab eodem puncto E ad *focum a* recta E*a*, anguli *m*E*n*, *a*E*z*, quos cum recta *nz parabolicam* curvam tangente in puncto E, ipsæ rectæ *m*E, *a*E constituunt, erunt æquales.

De hyperbola.

I.

530. *Hyperbola est figura plana curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus abscissis, & sub recta composita ex ipsis abscissis, & ex altera recta certæ magnitudinis axi in directum adjecta.* Spectetur figura ABC curva ABC comprehensa (*fig.* 18. *Tab.* IV.), cujus axis sit recta B*c*, eique adjecta sit in directum recta BD determinatæ quantitatis. *Semiordinatæ* ad axim sint rectæ *ab*, *cd*. Figura itaque ABC erit *hyperbola*, si quadratum *semiordinatæ ab* fuerit ad quadratum *semiordinatæ cd*, ut rectangulum ex DB + B*a* in *abscissam* B*a* ad rectangulum ex DB + B*c* in *abscissam* B*c*. Recta DB dicitur *axis transversus hyperbolæ*; illius vero *centrum* punctum medium N.

II.

531. *Parameter hyperbolæ est recta ducta ad perpendiculum ex vertice axis, cujus ratio ad axim transversum eadem est cum illa, quam habet quadratum cujuslibet semiordinatæ ad rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex eadem abscissa, & ex axe transverso.* Sic recta BP (*fig.* 18. *Tab.* IV.) perpendicularis axi B*c* erit *parameter hy-*

per-

perbolæ ABC, si ipsa BP fuerit ad *axim transversum* BD, ut quadratum cujuslibet *semiordinatæ ab* ad rectangulum ex DB+Aa in B*a*.

III.

532. Quoniam vero, ducta ex extremo D (*fig.* 18. *T.* IV.) *transversi axis* DB per extremum *parametri* punctum P recta DQ, atque ad eam usque producta quavis *semiordinata ab*, quadratum cujuslibet *semiordinatæ ab* adæquat rectangulum ex *abscissa* B*a* in rectam *ax*, rectangulum scilicet B*ax*, quod excedit rectangulum B*a*P ex eadem *abscissa* in *parametrum* BP quantitate rectanguli P*ex*, propter hunc excessum quadrati cujuslibet *semiordinatæ* super rectangulum ex *parametro* in *sagittam*, figura ABC nomen *hyperbolæ*, quod *excessum* sonat, obtinuit.

VI.

533. Quemadmodum in *ellipsi*, ita in *hyperbola*, *axis conjugatus est recta linea per centrum transiens ad angulos rectos, bifariam in illo divisa, media geometrice proportionalis inter axim transversum, ejusque parametrum*. Sic recta *mn* (*fig.* 18. *Tab.* IV.) transiens ad angulos rectos per centrum N *hyperbolæ* ABC, atque in illo bifariam divisa, erit *axis conjugatus* ipsius *hyperbolæ*, si fuerit media geometrice proportionalis inter *axim transversum* DB, ejusque *parametrum* BP.

V.

534. *Foci sive umblici hyperbolæ sunt duo puncta sumta in axe, ita hinc inde remota a suo vertice, ut rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex ipsa abscissa, & ex axe transverso sit æquale quadrato semiaxis conjugati*. Sic puncta *a*, *b* (*fig.* 19 *Tab.* IV.) sumta in axe *hyperbolæ* AC, cujus *axis transversus* sit recta DA, *semiaxis conjuga-*

jugatus recta *mn*, erunt *foci* ipsius *hyperbolæ*, si rectangulum ex *Aa* in DA+*Aa*, sicuti etiam rectangulum ex D*b* in AD+D*b*, fuerit æquale quadrato *semiaxis* conjugati *mn*. Æqualiter idcirco distant *foci hyperbolæ* tum ab illius centro *m*, tum a suo vertice A, D *respective*; tantaque est utriusque distantia a centro *m*, ut rectam adæquet D*n* ductam ab extremo *n semiaxis conjugati mn* ad verticem D. Insuper *semiordinata ax* ducta a *foco a* est æqualis *semiparametro* ipsius *hyperbolæ*, quemadmodum diximus de *semiordinata* ducta a *foco ellipseos*, & *parabolæ*. At demum, si ad quodvis punctum C curvæ *hyperbolicæ* AxC ex *focis a*, *b* ducantur rectæ *b*C, *a*C, & per idem punctum C recta tangens *de*, anguli *a*C*d*, *d*C*b* sunt æquales.

VI.

535. Postremo, si in recta FE tangente curvam *hyperbolicam* ABC in vertice B (*fig.* 20. *Tab.* IV.) sumantur hinc inde ab ipso vertice partes BF, BE, quarum utraque sit æqualis semidiametro conjugatæ; tum a centro D per extrema F, E ducantur rectæ indefinitæ D*n*, D*x*, hæ ad curvam *hyperbolicam* ABC continuo accedent, nunquam tamen cum illa convenient. Videlicet, ductis rectis *dm*, *nx* &c. parallelis tangenti FE, continuo decrescunt segmenta *da*, *nc*, sicuti etiam *bm*, *ex*, at nunquam in nihilum abeunt. Hujusmodi itaque rectæ continuo ad curvam *hyperbolicam* accedentes, & nunquam cum illa concurrentes, *asymptoti hyperbolæ* dici solent.

FINIS.













